Corrigé du DM2

Corrigé de l'exercice 1 (Calcul de séries).

1. *Fixons $k \in \mathbb{N}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^k}{2^n}$ étant à termes strictement positifs (à partir de $n = 1$), on peut utiliser le critère de d'Alembert : si on pose $u_n = \dfrac{n^k}{2^n}$, alors on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^k}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \times \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^k}{2^n} \text{ converge}}$.

2. *D'après le résultat du cours sur les séries géométriques de raison $|q| < 1$, on a*

$$\boxed{S(0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}.$$

3. *En faisant le changement d'indice $n \leftarrow n-1$, on obtient :*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}},$$

la dernière égalité résultant du fait que le terme $\dfrac{n}{2^n}$ est nul pour $n = 0$.

4. *Dans l'égalité précédemment montrée, on peut séparer le membre de gauche en deux séries convergentes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Or, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = S(1)$ (puisque le terme $\frac{n}{2^n}$ est nul pour $n = 0$), et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = S(0) - 1 = 2 - 1 = 1$, donc en remplaçant :

$$\frac{1}{2}S(1) = 1,$$

c'est-à-dire $\boxed{S(1) = 2}$.

5. *Puisque $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n},$$

(en faisant le changement d'indice $n \leftarrow n+1$). Mais le terme $\dfrac{n^2}{2^n}$ est nul pour $n = 0$, donc on peut le rajouter à la somme :

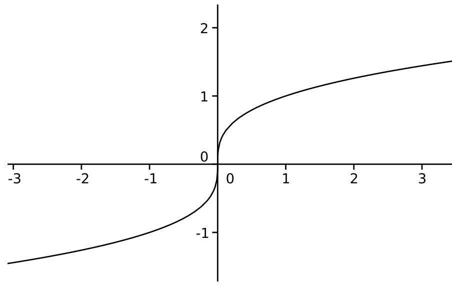
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} + \frac{0^2}{2^0} = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}}.$$

6. *Dans l'égalité précédemment montrée, on peut séparer le membre de gauche en trois séries convergentes :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.$$
On a donc
$$\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}}_{=S(2)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}}_{=S(1)} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}}_{=S(0)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}}_{=S(2)},$$
c'est-à-dire $\frac{1}{2}S(2)+S(1)+\frac{1}{2}S(0)=S(2)$, *ce qui conduit à* $\boxed{S(2)=2S(1)+S(0)=6}$.

7. *Pour* $k\in\mathbb{N}$ *fixé, calculons :*
$$\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}S(p) = \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{2^n}\right).$$
Vu que pour tout $p\in\{0,\cdots,k+1\}$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n^p}{2^n}$ *converge, on en déduit par combinaison linéaire (finie) de séries convergentes que l'on peut permuter la somme finie et la somme infinie (les variables de sommation* p *et* n *sont non liées) :*
$$\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}S(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}\frac{n^p}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}n^p\right).$$
En utilisant alors la formule du binôme de Newton, on a $\sum\limits_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}n^p=(n+1)^{k+1}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *donc finalement*
$$\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}S(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}(n+1)^{k+1}.$$
En effectuant alors le changement d'indice $n\leftarrow n+1$, *on obtient*
$$\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}S(p) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}n^{k+1} = 2S(k+1),$$
d'où la relation
$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad S(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}S(p)}.$$

8. *La relation précédente utilisée avec* $k=0$ *donne :*
$$S(1)=\frac{1}{2}\left(\binom{1}{0}S(0)+\binom{1}{1}S(1)\right) \iff \boxed{S(1)=S(0)=2}.$$
La même relation utilisée avec $k=1$ *donne :*
$$S(2)=\frac{1}{2}\left(\binom{2}{0}S(0)+\binom{2}{1}S(1)+\binom{2}{2}S(2)\right) \iff \boxed{S(2)=S(0)+2S(1)=6}.$$
On retrouve donc bien les valeurs de $S(1)$ *et* $S(2)$ *précédemment obtenues.*
Enfin, la même relation utilisée avec $k=2$ *donne :*
$$S(3)=\frac{1}{2}\left(\binom{3}{0}S(0)+\binom{3}{1}S(1)+\binom{3}{2}S(2)+\binom{3}{3}S(3)\right) \iff \boxed{S(3)=S(0)+3S(1)+3S(2)=26}.$$

Corrigé de l'exercice 2 (Etude de la convergence d'une série en fonction d'un paramètre). 1. *La fonction* $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ *est la fonction réciproque de* $x \mapsto x^3$*. C'est une bijection* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*
Graphe de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ *:*



2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n^2+3 \geq 0$ *donc* $\sqrt{n^2+3}$ *existe. En outre,* $\sqrt[3]{n^3+an}$ *existe pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$ *puisque la fonction racine cubique est définie sur* $\mathbb{R}$*. Ceci montre que* u_n *existe pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
3. *En utilisant le DL* $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *avec* $\alpha = 1/2$ *puis* $\alpha = 1/3$*, on obtient :*
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2),$$
$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
4. *Faisons un développement asymptotique de* u_n*, à l'aide des deux DL précédents :*
$$\begin{aligned} u_n &= \left(n^3+an\right)^{1/3} - \left(n^2+3\right)^{1/2} = n\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2}\right) \\ &= n\left(1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right) - \left(1 + \frac{3}{2n^2} - \frac{9}{8n^4} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right). \\ &= n\left(\frac{a}{3n^2} - \frac{3}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{2a-9}{6n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$
5. *Deux cas se présentent :*
   - *Si* $a \neq \frac{9}{2}$*, alors* $u_n \sim \frac{2a-9}{6n}$*. Vu que la série* $\sum \frac{2a-9}{6n} = \frac{2a-9}{6}\sum\frac{1}{n}$ *diverge (série harmonique), on en déduit par le critère des équivalents (qui s'applique car* u_n *est de signe constant) que* $\sum u_n$ *diverge.*
   - *Si* $a = \frac{9}{2}$*, alors* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$*, donc il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $|u_n| \leq \frac{M}{n^3}$*. Puisque* $\sum \frac{M}{n^3}$ *converge, on en déduit par le critère de comparaison que* $\sum |u_n|$ *converge, et donc que* $\sum u_n$ *converge.*

   Finalement, la série $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $a = \frac{9}{2}$*.*