DM2 : à rendre lundi 16/09/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices.

Exercice 1 (Calcul de séries).
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^k}{2^n}$.
Remarque : on utilisera la convention classique "$0^0 = 1$". Ainsi, pour $k = 0$, on a $n^k = n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on obtient la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^k}{2^n}$ converge.

Dans la suite, on pose $S(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{2^n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Calculer $S(0)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$
4. En déduire la valeur de $S(1)$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.
6. En déduire une relation reliant $S(2), S(1)$ et $S(0)$, puis calculer $S(2)$.
7. *Soit $k \in \mathbb{N}$. En réutilisant les techniques précédentes et la formule du binôme de Newton, montrer que
$$S(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} S(p).$$
8. Grâce à cette relation de récurrence, vérifier alors les valeurs de $S(1)$ et $S(2)$ précédemment obtenues, puis calculer $S(3)$.

Exercice 2 (Etude de la convergence d'une série en fonction d'un paramètre).
On se propose d'étudier la nature de la série numérique $\sum u_n$ avec
$$u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3},$$
où a est un paramètre réel.

1. Rappeler ce qu'est la fonction "racine cubique" $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, et donner sans justifier son domaine de définition et son graphe.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie quelle que soit la valeur de $a \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le développement limité des fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_a \in \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) telle que
$$u_n = \frac{C_a}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
5. Etudier la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ en fonction du paramètre a.
On pourra distinguer le cas où $C_a = 0$.