Corrigé du DM1

Corrigé de l'exercice 1 (Etude d'un autre type de suite récurrente).

1. (a) *En évaluant successivement la formule* $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ *en* $n=1$, $n=2$ *et* $n=3$, *on obtient :*

$$\boxed{u_2} = \frac{1}{2(1+1)}u_1 + \frac{3(1+2)}{2(1+1)} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \boxed{\frac{5}{2}},$$

$$\boxed{u_3} = \frac{2}{2(2+1)}u_2 + \frac{3(2+2)}{2(2+1)} = \frac{1}{3} * \frac{5}{2} + 2 = \boxed{\frac{17}{6}},$$

$$\boxed{u_4} = \frac{3}{2(3+1)}u_3 + \frac{3(3+2)}{2(3+1)} = \frac{3}{8} * \frac{17}{6} + \frac{15}{8} = \boxed{\frac{47}{16}}.$$

(b) *Montrons par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 3$ *:*

- **Initialisation** *: c'est vrai pour* $n=1$ *car* $u_1 = 1 \leq 3$.
- **Hérédité** *: soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que* $u_n \leq 3$ *et montrons qu'on a alors* $u_{n+1} \leq 3$. *Vu que* $u_n \leq 3$ *et que* $\frac{n}{2(n+1)} \geq 0$, *on obtient par produit* $\frac{n}{2(n+1)}u_n \leq \frac{3n}{2(n+1)}$, *et donc par somme :*

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \leq \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{3(2n+2)}{2(n+1)} = 3,$$

donc $u_{n+1} \leq 3$.

Ceci montre par le théorème de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq 3}$. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est donc majorée par* 3.

(c) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Etudions le signe de* $u_{n+1} - u_n$ *:*

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}-u_n = \frac{nu_n + 3n + 6 - 2(n+1)u_n}{2(n+1)} = \frac{3n+6-(n+2)u_n}{2(n+1)},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}.$$

Puisque $n+2 > 0$, $2(n+1) > 0$ *et* $3 - u_n \geq 0$ *d'après la question 1.(b), on a* $u_{n+1} - u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et donc* $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

(d) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante (d'après la question précédente), et majorée par* 3 *(d'après 1.(b)) donc* $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell}$ *(et on a nécessairement* $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \leq 3$*).*

Calculons maintenant ℓ *: puisque* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\frac{n}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ *et* $\frac{3(n+2)}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$ *(facile en déterminant des équivalents), on en déduit par produit et somme que*

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = \frac{1}{2} * \ell + \frac{3}{2}.$$

Mais on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, *donc par unicité de la limite, on obtient* $\frac{1}{2} * \ell + \frac{3}{2} = \ell$, *c'est-à-dire* $\ell = 3$. *Finalement, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* $\boxed{\ell = 3}$.

2. (a) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a, par définition des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *:*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)(3-u_{n+1}) = (n+1)\left(3 - \tfrac{n}{2(n+1)}u_n - \tfrac{3(n+2)}{2(n+1)}\right) \\ &= 3n+3-\tfrac{n}{2}u_n - \tfrac{3}{2}(n+2) = \tfrac{3}{2}n - \tfrac{n}{2}u_n = \tfrac{n}{2}(3-u_n), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc géométrique de raison } 1/2}$.

(b) *On déduit de la question précédente la relation*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} * v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 3 - \frac{v_n}{n} = 3 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}.$$

(c) *Puisque* $\frac{1}{2} \in]0;1[$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$. *De plus,* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, *donc par produit et somme de limites, l'expression de* u_n *donne* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 - 0 * 0 = 3}$.

Corrigé de l'exercice 2 (Etude d'une suite de zéros de polynômes (*)). 1. *Pour* $n \geq 2$ *fixé, la fonction* $x \mapsto P_n(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *et*

$$\forall x \geq 0, \qquad P_n'(x) = -(1 + 2x + \cdots + nx^{-1}) \leq -1 < 0,$$

donc $\boxed{\text{la fonction } P_n \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } [0;+\infty[}$. *En tant que fonction continue et strictement monotone, la fonction* P_n *est donc une bijection de* $[0;+\infty[$ *dans* $]\lim\limits_{+\infty} P_n; P_n(0)] =]-\infty;1]$. *Par restriction, on obtient une bijection de* $]0;1[$ *dans* $]P_n(1); P_n(0)[=]1-n;1[$, *et* $0 \in]1-n;1[$ *(puisque* $n \geq 2$*), donc* 0 *possède un unique antécédent dans* $]0;1[$.
On a bien montré $\boxed{\text{qu'il existe un unique réel } x_n \in]0;1[\text{ tel que } P_n(x_n) = 0}$.

2. *On a*

$$P_{n+1}(x_n) = 1 - (x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n + x_n^{n+1}) = \underbrace{P_n(x_n)}_{=0} - x_n^{n+1} = -x_n^{n+1} < 0,$$

donc $\boxed{P_{n+1}(x_n) \text{ est strictement négatif}}$. *Puisque* $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ *(par définition de la suite* (x_n)*), on a* $P_{n+1}(x_n) < P_{n+1}(x_{n+1})$, *donc* $x_n > x_{n+1}$ *puisque la fonction* P_{n+1} *est strictement décroissante. Ceci montre que* $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

3. *La suite* (x_n) *est décroissante et minorée (par* 0*), donc* $\boxed{\text{elle converge vers un réel } L \geq 0}$.

4. (a) *Vu que* (x_n) *décroît, on a* $0 \leq x_n \leq x_2 < 1$, *donc* $0 \leq x_n^n \leq x_2^n$ *pour tout* $n \geq 2$. *Puisque* $x_2 \in]0;1[$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_2^n = 0$, *donc par le théorème des gendarmes,* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0}$.

(b) *Pour tout réel* $x \neq 1$, *on a*

$$P_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 - x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{1-x},$$

d'où le résultat voulu avec $\boxed{Q_n : x \mapsto x^{n+1} - 2x + 1}$.

(c) *Pour tout* $n \geq 2$, $P_n(x_n) = 0$ *et* $x_n \neq 1$, *donc d'après la question précédente,* $Q_n(x_n) = 0$, *ce qui équivaut à*

$$\forall n \geq 2, \qquad x_n^n * x_n - 2x_n + 1 = 0.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$, *on en déduit par passage à la limite que*

$$0 * L - 2L + 1 = 0,$$

c'est-à-dire $\boxed{L = \frac{1}{2}}$.

5. (a) *Pour tout entier* $n \geq 2$ *et tous réels* $x \geq 0$, $\varepsilon > 0$, *on a*

$$P_n(x+\varepsilon) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (x+\varepsilon)^k = 1 - x - \varepsilon - \sum_{k=2}^{n} (x+\varepsilon)^k.$$

Or $(x+\varepsilon)^k > x^k$ *pour tout* $k \geq 2$, *donc*

$$P_n(x+\varepsilon) < 1 - x - \varepsilon - \sum_{k=2}^{n} x^k = \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x^k\right) - \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\boxed{P_n(x+\varepsilon) < P_n(x) - \varepsilon}$.

(b) *On a* $\boxed{P_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2^n}}$, *donc d'après la question précédente :*

$$P_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right) < P_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^n} = 0.$$

Ainsi, $\boxed{P_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right) < 0}$.

(c) *On a* $P_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right) < 0 = P_n(x_n) < \frac{1}{2^n} = P_n\left(\frac{1}{2}\right)$, *donc, par stricte décroissance de la fonction* P_n *:*

$$\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{0 < u_n < \frac{1}{2^n}}.$$

(d) *Vu que* $x_n = u_n + \frac{1}{2}$ *et que* $Q_n(x_n) = 0$, *on a*

$$\forall n \geq 2, \qquad \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(u_n + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0,$$

c'est-à-dire $\boxed{\left(u_n + \frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2u_n}$.

(e) *D'après l'égalité précédente :*

$$2^{n+2}u_n = 2^{n+1}\left(u_n + \frac{1}{2}\right)^{n+1} = (2u_n+1)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1+2u_n)}.$$

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *on a* $(n+1)\ln(1+2u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2nu_n$. *L'inégalité montrée en 5.(c) donne alors* $0 \leq 2nu_n < \frac{2n}{2^n}$, *et donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_n = 0$ *par croissances comparées.*
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\ln(1+2u_n) = 0$, *donc*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+2}u_n = e^0 = 1,$$

ce qui prouve que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}}$.