DM1 : à rendre lundi 09/09/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercies.
Le second exercice est plus difficile.

Exercice 1 (Etude d'un autre type de suite récurrente).
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par les relations :

$$u_1 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}.$$

Attention ! Il ne s'agit pas d'une suite récurrente de la forme "habituelle" $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, on a ici la forme $u_{n+1} = g(n, u_n)$ (puisque u_{n+1} dépend de u_n et de n).

1. (a) Calculer u_2, u_3, u_4.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 3.
   (c) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \geq 1,\ v_n = n(3 - u_n)$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   (c) Retrouver ainsi la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 (Etude d'une suite de zéros de polynômes (*)).
Soit $n \geq 2$ un entier. On définit la fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \geq 0, \qquad P_n(x) = 1 - (x + x^2 + \cdots + x^n).$$

1. Pour $n \geq 2$ fixé, étudier les variations de la fonction P_n sur $[0; +\infty[$.
   En déduire l'existence d'un unique réel x_n vérifiant $0 < x_n < 1$ et $P_n(x_n) = 0$.
   Vu que cela est vrai pour tout $n \geq 2$, cela définit donc une suite réelle $(x_n)_{n\geq 2}$, qu'on se propose d'étudier dans les questions suivantes.
2. Quel est le signe de $P_{n+1}(x_n)$? En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente. On notera L sa limite.
4. On cherche la valeur de L.
   (a) Montrer que $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{1-x}$, où Q_n est une fonction polynomiale à déterminer.
   (c) En déduire la valeur de L.
5. On cherche la vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$. On pose donc $u_n = x_n - L$ pour tout $n \geq 2$.
   (a) Vérifier que pour $n \geq 2$, $x \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on a $P_n(x + \varepsilon) < P_n(x) - \varepsilon$.
   (b) Calculer $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $n \geq 2$ et en déduire le signe de $P_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)$.
   (c) En déduire que $\forall n \geq 2$, on a $0 < u_n < \frac{1}{2^n}$.
   (d) Montrer que $\left(u_n + \frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2u_n$.
   (e) En déduire finalement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}$.