Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 15
Isométries vectorielles

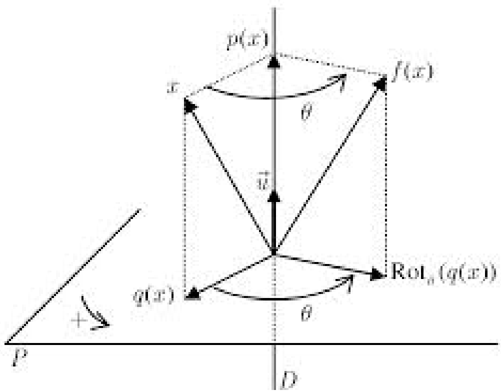

Table des matières

Dans tout ce chapitre, E désigne un **espace euclidien**, c'est-à-dire un espace vectoriel **de dimension finie** sur $K = \mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \, , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$. On notera $\boldsymbol{n = \dim(E) \geq 1}$.

I Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1) Définition

Définition 1 (Isométrie vectorielle).
Une **isométrie vectorielle** *de E est un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ qui*
conserve la norme, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, l'endomorphisme $f : (x, y) \mapsto (y, -x)$ est une isométrie vectorielle.
En effet, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|f(x; y)\| = \|(y : -x)\| = \sqrt{y^2 + (-x)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x; y)\|.$$

2) Caractérisation par la conservation du produit scalaire

Proposition 2 (Equivalence avec la conservation du produit scalaire).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est une isométrie vectorielle} \iff \forall (x;y) \in E^2, \quad \langle f(x); f(y) \rangle = \langle x; y \rangle.$$

Preuve :

- $\boxed{\Leftarrow}$ C'est évident car si f conserve le produit scalaire, alors en utilisant la propriété $\forall (x;y) \in E^2,\ \langle f(x); f(y) \rangle = \langle x; y \rangle$ avec $x = y$, on obtient

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \langle f(x), f(x) \rangle^{1/2} = \langle x, x \rangle^{1/2} = \|x\|.$$

- $\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si on a $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$, alors on en déduit par une identité de polarisation et la linéarité de f que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y) \rangle &= \tfrac{1}{4} \left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2 \right) \\
&= \tfrac{1}{4} \left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2 \right)
\end{aligned}$$

Puisque f conserve la norme, on a alors

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x, y\rangle.$$

$\square$

ATTENTION !
L'équivalence est **fausse si on ne suppose pas f linéaire !**
Une application non-linéaire peut très bien conserver la norme sans conserver le produit scalaire.

Vocabulaire
Les isométries vectorielles sont parfois appelées **endomorphismes orthogonaux**, car elles conservent l'orthogonalité :

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0 \iff \langle f(x), f(y)\rangle = 0 \iff f(x) \perp f(y).$$

3) Groupe orthogonal

Notation
On notera $\boldsymbol{\mathcal{O}(E)}$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 3 (Bijectivité des isométries vectorielles).
Si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors f est bijective (et donc f est un automorphisme de E) .
. . . .

ATTENTION !
La réciproque est évidemment fausse.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On sait déjà que f est un endomorphisme de E.
De plus, la conservation de la norme entraîne $Ker(f) = \{0_E\}$, car

$$x \in Ker(f) \iff f(x) = 0_E \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0_E.$$

Donc f est injectif. On en déduit la surjectivité de f par le théorème du rang (par exemple), qui s'applique puisque E est de dimension finie.

$\square$

Remarque

- On a donc les inclusions $\mathcal{O}(E) \subset GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$.
- On emploie parfois le terme "automorphisme orthogonal" pour désigner une isométrie vectorielle.

Proposition 4 (Structure de groupe de $\mathcal{O}(E)$).
L'ensemble $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi associative $\circ$, est un **groupe**, *c'est-à-dire :*

(i) $\mathcal{O}(E)$ *est stable par composition :* $f, g \in \mathcal{O}(E) \implies f \circ g \in \mathcal{O}(E)$.

(ii) $\mathcal{O}(E)$ *contient l'élément neutre :* $Id_E \in \mathcal{O}(E)$.

(iii) $\mathcal{O}(E)$ *est stable par inverse :* $f \in \mathcal{O}(E) \implies f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Preuve :

(i) Si $f, g \in \mathcal{O}(E)$, alors f et g conservent la norme, donc pour tout $x \in E$:

$$\|(f \circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|,$$

ce qui montre que $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $\|Id_E(x)\| = \|x\|$, donc $Id_E \in \mathcal{O}(E)$.

(iii) Si $f \in \mathcal{O}(E)$, fixons $y \in E$, et notons $x = f^{-1}(y)$ son unique antécédent :

$$\|f^{-1}(y)\| = \|x\| = \|f(x)\| = \|y\|,$$

donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

$\square$

Vocabulaire
On appelle $\mathcal{O}(E)$ le **groupe orthogonal de** E.

ATTENTION !
Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{O}(E)}$ **n'est pas commutatif en général** $(g \circ f \neq f \circ g)$.

4) Symétries orthogonales

Proposition 5 (Les symétries orthogonales sont des isométries).
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, la symétrie orthogonale
. . . .
par rapport à F, notée σ_F, appartient à $\mathcal{O}(E)$.
. . . .

Preuve : On sait déjà que la symétrie orthogonale σ_F est un endomorphisme de E (voir chapitre 12). Il reste à montrer que σ_F conserve la norme.
Soit $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus F^{\perp}$. On a $\sigma_F(x) = x_1 - x_2$, donc

$$\|\sigma_F(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d'après le théorème de Pythagore, qui s'applique puisque $x_1 \perp x_2$ et $x_1 \perp -x_2$.
Finalement, on a bien $\|\sigma_F(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, donc $\sigma_F \in \mathcal{O}(E)$.

$\square$

Remarque

- La projection orthogonale sur F **n'est pas** une isométrie vectorielle (sauf si $F = E$, auquel cas $p_F = Id_E \dots$).
  En effet, si $F \subsetneq E$, alors p_F n'est pas bijective (puisque $Ker(p_F) = F^{\perp} \neq \{0_E\}$), donc $p_F \notin \mathcal{O}(E)$.

- En général, une projection orthogonale ne conserve pas la norme, elle la diminue : $\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
  En effet, les vecteurs $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

5) Conservation des bases orthonormées

Proposition 6 (Conservation des bases orthonormées).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*
. . . .

(i) $f \in \mathcal{O}(E)$ *;*
. . . .

(ii) *Pour toute base* **orthonormée** $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *de E, la famille image*
. . . .
$(f(e_i))_{1\leq i\leq n}$ *est une base orthonormée de E ;*
. . . .

(iii) *Il existe une base* **orthonormée** $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *de E telle que la famille image*
. . . .
$(f(e_i))_{1\leq i\leq n}$ *est une base orthonormée de E .*
. . . .

Preuve :

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Supposons que $f \in \mathcal{O}(E)$ et considérons $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Montrons que la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormée de E. Déjà, f étant bijective, $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base de E (c'est l'image d'une base). Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Puisque f est une isométrie vectorielle , elle conserve le produit scalaire et donc

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$$

(puisque la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormée).
Ceci montre bien que la base $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est orthonormée.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Evident car tout espace euclidien E possède au moins une base orthonormée.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Supposons qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de E dont l'image est aussi une base orthonormée de E. Montrons alors que f conserve la norme. Pour $x \in E$, nous avons

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k,$$

donc par linéarité :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle f(e_k).$$

Puisque la base $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée, on a $\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$.
Mais on a aussi $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$ car $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E, donc $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$, ce qui montre que $f \in \mathcal{O}(E)$.

$\square$

Remarque

Les isométries vectorielles sont donc exactement les endomorphismes qui conservent les bases orthonormées.

6) Isométries et sous-espaces stables

Proposition 7 (Orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie).
Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

Preuve : Par hypothèse, on a $f(F) \subset F$.
Montrons que $F^\perp$ est stable par f. Soit $y \in F^\perp$. Montrons que $f(y) \in F^\perp$ en calculant $\langle f(y), x\rangle$ pour tout $x \in F$.
Puisque f est un automorphisme, il conserve la dimension donc l'inclusion $f(F) \subset F$ donne l'égalité $f(F) = F$. On en déduit que le vecteur $x \in F$ possède un antécédent $t \in F$. Ainsi :

$$\langle f(y), x\rangle = \langle f(y), f(t)\rangle = \langle y, t\rangle = 0,$$

puisque $t \in F$ et $y \in F^\perp$.

$\square$

II Matrices orthogonales

1) Définition

Proposition 8 (Représentation d'une isométrie vectorielle dans une b.o.n).
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base **orthonormée** *de E.*
. . . .
On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$.
. . . .

ATTENTION !
Ce résultat est **faux** si on représente f dans une **base quelconque**.

Preuve :

- A est inversible car f est bijective.
- Les colonnes de A sont les coordonnées des $f(e_j)$ dans la base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$, donc on a
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A[i,j] = \langle f(e_j), e_i \rangle$$
(d'après l'expression des coordonnées dans une base orthonormée).
- De même, les colonnes de A^{-1} sont les coordonnées des $f^{-1}(e_j)$ dans $(e_1, \cdots, e_n)$, donc
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A^{-1}[i,j] = \langle f^{-1}(e_j), e_i \rangle.$$

Puisque f conserve le produit scalaire, on en déduit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A^{-1}[i,j] = \langle f(f^{-1}(e_j)), f(e_i)\rangle = \langle e_j, f(e_i)\rangle = \langle f(e_i), e_j\rangle = A[j,i],$$

ce qui montre bien que $A^{-1} = A^T$.

$\square$

Ceci amène la définition suivante :

Définition 9 (Matrice orthogonale).
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite* **orthogonale** *si* $A^T \times A = I_n$.
. . . .

Remarque
A est orthogonale $\iff A \times A^T = I_n \iff A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$.

2) Groupe orthogonal matriciel

Notation
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on notera $\boldsymbol{\mathcal{O}_n}(\mathbb{R})$ (ou encore $\boldsymbol{\mathcal{O}(n)}$) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 10 (Structure de groupe de $\boldsymbol{\mathcal{O}_n}(\mathbb{R})$).
L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, muni du produit matriciel $\times$, est un **groupe**, *c'est-à-dire :*

(i) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *est stable par produit :* $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies A \times B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *contient l'élément neutre :* $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(iii) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *est stable par inverse :* $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

(i) Si $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(AB)^T AB = (B^T A^T)(AB) = B^T \underbrace{(A^T A)}_{=I_n} B = B^T B = I_n,$$

donc $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $I_n^T I_n = I_n^2 = I_n$.

(*iii*) Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible et $A^{-1} = A^T$, donc

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^T = A \times A^T = I_n,$$

ce qui montre que $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$\square$

Vocabulaire
On appelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le **groupe orthogonal matriciel d'ordre** n.

ATTENTION !
Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{O}_n}(\mathbb{R})$ **n'est pas commutatif en général**.

3) Correspondance isom. vectorielles/matrices orthogonales

Proposition 11 (Correspondance $\mathcal{O}(E)/\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E. Alors on a*

. . . .

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

. . . .

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Déjà montré, c'est l'énoncé de la proposition 8.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Par hypothèse, on a $A \times A^T = I_n$. Montrons que $f \in \mathcal{O}(E)$, c'est-à-dire que f conserve la norme.
Soit $x \in E$, notons $X = [x]_{\mathcal{B}}$ (le vecteur colonne formé des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$).
Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $\|x\|^2 = X^T\ X$.
En outre, $[f(x)]_{\mathcal{B}} = Mat_{\mathcal{B}}(f) \times [x]_{\mathcal{B}} = AX$, donc

$$\|f(x)\|^2 = (AX)^T\ (AX) = X^T \underbrace{(A^T A)}_{=I_n} X = X^T\ X = \|x\|^2,$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{O}(E)$.

$\square$

Remarque
Bien entendu, une matrice A est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme $f_A : X \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A est orthogonal (parce que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée).

4) Caractérisation simple des matrices orthogonales

On donne ici une caractérisation des matrices orthogonales à partir d'une propriété géométrique sur les colonnes. Ici, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

Proposition 12 (Diverses caractérisations des matrices orthogonales).
Les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
. . . .

(ii) *les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;*
. . . .

(iii) $A^T \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
. . . .

(iv) *les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*
. . . .

ATTENTION !
Base ortho**normée**, pas orthogonale !

Preuve : Remarquons que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (A^T\ A)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} A[k,i]A[k,j] = \langle C_i, C_j \rangle,$$

où $(C_1, \cdots, C_n)$ désignent les colonnes de la matrice carrée A et $\langle \ , \ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On a donc

$$\begin{aligned}(i) \quad &\iff \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (A^T\ A)[i,j] = \delta_{i,j} \\ &\iff \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j} \iff (C_1, \cdots, C_n) \text{ orthonormée.} \\ &\iff \quad (ii)\end{aligned}$$

Puisque $A^T \times A = I_n \iff A \times A^T = I_n$, on en déduit que $(i) \iff (iii)$.
Enfin, les colonnes de A^T sont les lignes de A, donc d'après l'équivalence $(i) \iff (ii)$:

$$(iii) \iff \text{ les colonnes de } A^T \text{ forment une base orthonormée } \iff (iv).$$

$\square$

Exemple
Montrer que la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Les colonnes de A sont $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $C_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{cases} \langle C_1; C_2\rangle = \langle C_1; C_3\rangle = \langle C_2; C_3\rangle = 0, \\ \langle C_1; C_1\rangle = \langle C_2; C_2\rangle = \langle C_3; C_3\rangle = 1. \end{cases}$$

(C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, donc $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Remarque (Interprétation en termes de changement de bases)
Si on fixe un espace euclidien E quelconque de dimension n, alors une matrice orthogonale $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ peut être vue :

- soit comme la matrice d'une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(E)$ **dans une base orthonormée pour le produit scalaire de E**.
- soit comme la matrice de passage **d'une base orthonormée de E à une autre**.

5) Valeurs propres d'une isométrie vectorielle

On rappelle que pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel), $sp(f)$ désigne le spectre de f, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres $\lambda \in \mathbb{K}$. De façon analogue, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $sp_{\mathbb{K}}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$.

Proposition 13 (Valeurs propres possibles des éléments de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

(*i*) *Si $f \in \mathcal{O}(E)$ (avec E espace euclidien), alors $sp(f) \subset \{-1, 1\}$.*

(*ii*) *Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$* .

ATTENTION !

- Puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on parle bien de valeurs propres **réelles** pour une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(E)$.
- En revanche, une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ peut posséder des valeurs propres complexes, **si on la considère comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

Preuve :

(*i*) Etant donnée une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de f, considérons $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a

$$\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|,$$

mais aussi $\|f(x)\| = \|x\|$ (puisque f conserve la norme). Donc $|\lambda| \times \|x\| = \|x\|$, ce qui entraîne $|\lambda| = 1$ puisque $\|x\| \neq 0$. Donc $\lambda = \pm 1$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Vu que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique, on en déduit que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. On utilise alors le point (i) : $sp_{\mathbb{R}}(A) = sp(f) \subset \{-1; 1\}$.

$\square$

ATTENTION !
La réciproque de la proposition est fausse :

Par exemple, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une isométrie vectorielle mais $sp(f) = \{1\}$.

En effet, le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(X) = (X-1)^2$, mais en notant $\overrightarrow{i} = (1;0)$:

$$\|f(\overrightarrow{i})\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \neq \|\overrightarrow{i}\| = 1,$$

donc $f \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

Remarque
Si $f \in \mathcal{O}(E)$, on a donc $sp(f) = \emptyset$ ou $sp(f) = \{1\}$ ou $sp(f) = \{-1\}$ ou $sp(f) = \{-1, 1\}$.
Une isométrie vectorielle peut ne posséder aucune valeur propre réelle.

6) Déterminant d'une isométrie vectorielle

Proposition 14 (Déterminant des éléments de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

(*i*) *Si* $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, *alors* $\det(A) = \pm 1$.

(*ii*) *Si* $f \in \mathcal{O}(E)$ *(avec* E *espace euclidien), alors* $\det(f) = \pm 1$.

Preuve :

(*i*) Puisque $A^T \times A = I_n$, on en déduit par multiplicativité du déterminant :

$$\det(A^T) \times \det(A) = \det(I_n) = 1,$$

c'est-à-dire $\det(A)^2 = 1$, d'où le résultat.

(*ii*) Fixons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et posons $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
Puisque $f \in \mathcal{O}(E)$, on a $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc $\det(f) = \det(A) = \pm 1$.

$\square$

ATTENTION !
Les implications réciproques sont fausses.

7) Caractérisation des symétries orthogonales

Proposition 15 (Caractérisation des symétries orthogonales).
Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée**
. . . .
de E. On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :
. . . .
f est une symétrie orthogonale $\iff$ A est orthogonale et symétrique.
. . . .

Preuve : La base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc on a déjà $f \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrons l'équivalence voulue.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si f est une symétrie orthogonale, on a $f \in \mathcal{O}(E)$ donc $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $A^T = A^{-1}$. En outre, $f \circ f = Id_E$, donc $A^2 = I_n$, et donc $A^T = A^{-1} = A$, ce qui montre que A est symétrique.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A est orthogonale et symétrique, on a $A^T = A^{-1}$ et $A^T = A$, donc $A^{-1} = A$, c'est-à-dire $A^2 = I_n$. Ceci montre que $f \circ f = Id_E$, et donc f est une symétrie.
Montrons ensuite que $Ker(f - Id_E) \perp Ker(f + Id_E)$. Soit $x_1 \in Ker(f - Id_E)$ et $x_2 \in Ker(f + Id_E)$. On a $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -x_2$, donc puisque f conserve le produit scalaire :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle f(x_1), f(x_2) \rangle = \langle x_1, -x_2 \rangle = -\langle x_1, x_2 \rangle,$$

et donc $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Finalement, f est bien une symétrie orthogonale.

$\square$

III Réduction des matrices symétriques réelles

1) Le théorème spectral

Proposition 16 (Eléments propres d'une matrice réelle symétrique).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **réelle et symétrique**. *Alors :*
. . . .

(*i*) *Toutes les valeurs propres (complexes) de A sont* **réelles**.
. . . .

(*ii*) *Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.*
. . . .

Preuve :

(*i*) Soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{C}$.
On montre que $\overline{\lambda} = \lambda$ en calculant $\overline{X}^T AX$ de deux manières différentes.

(ii) Calculer $X^T AY$ de deux manières différentes, où X est un vecteur propre associé à λ et Y un vecteur propre associé à μ. On obtient $X^T Y = 0$ dès que $\lambda \neq \mu$.

$\square$

On dispose en fait du résultat suivant, très important :

Théorème 17 (Théorème spectral).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **réelle et symétrique**. *Alors :*
. . . .
il existe une matrice **orthogonale** *$P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale* .
. . . .

Preuve : Admis, car difficile. □

Remarque (Reformulation du théorème spectral)
Toute matrice réelle symétrique est donc diagonalisable dans une base orthonormée : on peut trouver une matrice de passage P telle que $P^T = P^{-1}$.

ATTENTION !
C'est faux avec une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$! (voir exercices)

ATTENTION !
Ne pas inverser les rôles : A est symétrique, P est orthogonale.

2) Méthode pratique

Méthode (Pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée)

- Calculer une base de chaque sous-espace propre.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de chaque sous-espace propre.
- Réunir toutes ces bases : on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise la matrice **car les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux**.

Exemple

Diagonalisation de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

IV Signe d'une isométrie vectorielle

1) Définition

Définition 18 (Isométries vectorielles positives/négatives).
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On dit que

(i) f est une **isométrie positive** *si* $\det(f) = 1$,

(ii) f est une **isométrie négative** *si* $\det(f) = -1$.

Notation
On notera $\mathcal{SO}(E)$ (ou $\mathcal{O}^+(E)$) l'ensemble des isométries vectorielles positives de E, et $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles négatives de E.
Formellement :

$$\mathcal{SO}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E),\ \det(f) = 1\}.$$

ATTENTION !
$\mathcal{SO}(E) \neq \{f \in \mathcal{L}(E),\ \det(f) = 1\}$. En effet, il ne suffit pas qu'un endomorphisme soit de déterminant 1 pour qu'il conserve la norme !

Proposition 19 (Structure de groupe de $\mathcal{SO}(E)$).
L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$, muni de la loi associative $\circ$, est un **groupe**, *c'est-à-dire :*

(i) $f, g \in \mathcal{SO}(E) \implies f \circ g \in \mathcal{SO}(E)$.

(ii) $Id_E \in \mathcal{SO}(E)$.

(iii) $f \in \mathcal{SO}(E) \implies f^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$.

On l'appelle **groupe spécial orthogonal** *de E.*

Preuve :

(i) Si $f, g \in \mathcal{SO}(E)$, alors $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$ (car $f, g \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition). De plus, $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g) = 1 \times 1 = 1$, donc $f \circ g \in \mathcal{SO}(E)$.

(ii) $Id_E \in \mathcal{O}(E)$ et $\det(Id_E) = 1$, donc $Id_E \in \mathcal{SO}(E)$.

(iii) Si $f \in \mathcal{SO}(E)$, alors $f \in \mathcal{O}(E)$, donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ (déjà montré). De plus, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} = \frac{1}{1} = 1$, ce qui montre que $f^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$.

$\square$

Remarque

- La multiplicativité du déterminant donne :

$$(f, g) \in \mathcal{O}^-(E)^2 \implies f \circ g \in \mathcal{SO}(E).$$

- L'ensemble $\mathcal{O}^-(E)$ des isométries vectorielles négatives **n'est pas** un groupe (il n'est pas stable par $\circ$ et il ne contient même pas Id_E).

Définition 20 (Groupe spécial orthogonal matriciel).
On définit
$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T \times A = I_n,\ \det(A) = 1\}.$
(on le note aussi $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$). On définit également
$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = -1\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T \times A = I_n,\ \det(A) = -1\}.$

Proposition 21 (Structure de groupe de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$).
L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, muni du produit matriciel $\times$, est un **groupe**, *c'est-à-dire :*

(*i*) $A, B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \implies A \times B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

(*ii*) $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

(*iii*) $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \implies A^{-1} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

(*i*) Si $A, B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc le produit AB est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = 1 \times 1 = 1$, donc $AB \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ car $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(I_n) = 1$.

(iii) Si $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (déjà montré).
De plus, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$, donc $A^{-1} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

□

Remarque
Si on fixe une base **orthonormée** $\mathcal{B}$ de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$f \in \mathcal{SO}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

2) Conservation de l'orientation

Proposition 22 (Les isométries directes conservent l'orientation).
Soit un espace euclidien E **orienté** *(c'est-à-dire qu'on a choisi une base de référence, "directe"), et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

(i) Si $f \in \mathcal{SO}(E)$, alors f préserve les bases orthonormées directes et indirectes (c'est-à-dire que pour toute base $\mathcal{B}$, $f(\mathcal{B})$ est de même orientation que $\mathcal{B}$)

(ii) Réciproquement, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée de E de même orientation que $\mathcal{B}$, alors $f \in \mathcal{SO}(E)$.

Remarque

- Parmi les isométries vectorielles, les isométries positives sont celles qui "conservent l'orientation", c'est pourquoi on les appelle parfois "isométries directes".
- Conséquence directe : toute matrice de passage entre deux bases orthonormées de E **de même orientation** est une matrice de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

(i) Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors la famille image $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E (car $f \in \mathcal{O}(E)$), et cette base image a la même orientation que $\mathcal{B}$, puisque

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f)) = \det(f) = 1 > 0.$$

(ii) Puisque f transforme la base orthonormée $\mathcal{B}$ en base orthonormée $f(\mathcal{B})$, on a $f \in \mathcal{O}(E)$, donc $\det(f) = \pm 1$. De plus,

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) > 0,$$

car la base $f(\mathcal{B})$ a même orientation que $\mathcal{B}$. Donc $\det(f) = 1$, et $f \in \mathcal{SO}(E)$.

$\square$

Corollaire 23 (Indépendance du déterminant vis-à-vis des b.o.n.d).
Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E (espace euclidien orienté). Alors, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$ ne dépend pas de la base orthonormée **directe** *choisie.*

Preuve : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors, pour toute famille de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n),$$

car $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, vu que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (en effet, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation).

$\square$

Remarque
Cette proposition rend légitime la définition "du déterminant dans le plan" (ou dans l'espace) donnée dans le cours de géométrie de sup : peu importe la base orthonormée directe choisie, le déterminant sera toujours le même.

V Groupe orthogonal en dimension 2

Remarque (Situation triviale en dimension 1)
Si $\mathcal{D}$ est un espace euclidien de dimension 1 (une droite munie d'un produit scalaire), alors

$$\mathcal{O}(\mathcal{D}) = \{Id_{\mathcal{D}}; -Id_{\mathcal{D}}\}.$$

En effet, si $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, alors en fixant une b.o.n. u de $\mathcal{D}$, on a $Mat_{(u)}(f) = (\pm 1)$.

Etudions maintenant ce qui se passe **en dimension** 2, dans un **plan euclidien** E.

1) Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

La connaissance du groupe orthogonal matriciel $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ suffit à connaître $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 24 (Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$).

(i) *Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....
avec $\theta \in \mathbb{R}$ . ...

(ii) *Les matrices de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices* $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ ....
avec $\varphi \in \mathbb{R}$ . ...

Preuve : Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si : $\begin{cases} ac + bd = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$.

On sait que

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases},$$

$$c^2 + d^2 = 1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} c = \sin\beta \\ d = \cos\beta \end{cases}$$

Ces conditions étant vérifiées, on a donc

$$ac + bd = 0 \iff \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = 0 \iff \sin(\alpha+\beta) = 0,$$

c'est-à-dire

$$ac + bd = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha + \beta = k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \beta = k\pi - \alpha.$$

Puisque $\begin{cases} \cos(k\pi - \alpha) = (-1)^k \cos\alpha \\ \sin(k\pi - \alpha) = (-1)^{k+1} \sin\alpha \end{cases}$, on en déduit que

$$A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & (-1)^{k+1}\sin\alpha \\ \sin\alpha & (-1)^k \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Le déterminant vaut alors $\det(A) = (-1)^k \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = (-1)^k$.
Donc les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ correspondent au cas où $(-1)^k = 1$, et celles de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ au cas où $(-1)^k = -1$:

$$A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

On en déduit le résultat annoncé.

$\square$

Définition 25 (Matrices de rotation).
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on notera $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
On l'appelle **matrice de rotation d'angle** θ *(le réel θ est unique à 2π près).*

Remarque
On a alors $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) = \{R_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{R_\theta,\ \theta \in]-\pi, \pi]\}$.
(i.e. les matrices orthogonales positives sont exactement les matrices de rotation).

Proposition 26 (Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{SO}_2}(\mathbb{R})$ est commutatif).
Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$.
. . . .

Preuve : Simple vérification :

$$R_\theta \times R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}.$$

Or, $R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta}$, donc $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$. $\square$

ATTENTION !
Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{O}_2}(\mathbb{R})$ **n'est pas commutatif**. Par exemple, en posant
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A, B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, mais $AB \neq BA$.

2) Description de $\mathcal{SO}(E)$

Proposition 27 (Invariance de la matrice de $f \in \mathcal{SO}(E)$ dans une b.o.n.d).
Soit E un espace euclidien de dimension 2 **orienté**, *et soit $f \in \mathcal{SO}(E)$.*
. . . .
Alors, il existe un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que **pour toute base**
. . . .
orthonormée directe *$\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$* .
. . . .

Remarque
La matrice de $f \in \mathcal{SO}(E)$ est donc indépendante de la base orthonormée **directe** choisie.

Preuve : Notons $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées directes de E, et A_1, A_2 les matrices respectives de f dans ces bases. Les matrices A_1 et A_2 sont semblables. Puisque $f \in \mathcal{SO}(E)$ et que $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ sont orthonormées, on a $A_1, A_2 \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, donc il existe $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi; \pi]$ tels que $A_1 = R_{\theta_1}$ et $A_2 = R_{\theta_2}$.

De plus, la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est aussi dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (car les deux bases en question sont orthonormées et de même orientation), donc il existe $\alpha \in]-\pi;\pi]$ tel que $P = R_\alpha$. D'où $P^{-1} = R_{-\alpha}$ et

$$A_2 = R_{\theta_2} = P^{-1}A_1P = R_{-\alpha}R_{\theta_1}R_\alpha = R_{-\alpha+\theta_1+\alpha} = R_{\theta_1} = A_1,$$

ce qui montre le résultat : $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$ et $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi;\pi]$ donc $\theta_1 = \theta_2$.

$\square$

ATTENTION !
La matrice de f change si on l'écrit dans une base orthonormée indirecte.

La proposition précédente donne un sens à la définition suivante :

Définition 28 (Rotation plane d'angle θ).
Soit E un espace euclidien de dimension 2 **orienté**. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la* **rotation vectorielle d'angle** θ, *notée r_θ, est l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans* **toute** *base orthonormée* **directe** *est R_θ.*

Dessin :

Corollaire 29 (Nature des isométries positives en dimension 2).
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors les éléments de $\mathcal{SO}(E)$
sont exactement les rotations vectorielles .

Remarque
On a, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $r_0 = r_{2k\pi} = Id_E$ et $r_\pi = r_{(2k+1)\pi} = -Id_E$.

3) Description de $\mathcal{O}^-(E)$

On va maintenant étudier les $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $\det(f) = -1$.

Proposition 30 (Nature des isométries négatives en dimension 2).
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont exactement les symétries orthogonales **par rapport à une droite**.
Ce sont donc les réflexions du plan E .

Preuve :

- Soit $f \in \mathcal{O}^-(E)$ avec $\dim(E) = 2$. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. On a alors $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, donc il existe un réel φ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.
Cette matrice **à la fois orthogonale et symétrique**. On en déduit d'après la prop 15 que f est une symétrie orthogonale. Pour montrer que f est une réflexion, il reste à montrer que l'ensemble $F = Ker(f - Id_E)$ est une droite vectorielle.
On utilise la décomposition $E = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$ (vraie pour toute symétrie).
Si $\dim(Ker(f - Id_E)) = 0$, on a $E = Ker(f + Id_E)$, donc $f = -Id_E$, qui est dans $\mathcal{SO}(E)$ (puisque $\det(-Id_E) = (-1)^2 = 1$), donc il y a contradiction.
Si $\dim(Ker(f - Id_E)) = 2$, on a (de même), $f = Id_E$, qui donne aussi une

contradiction.
Donc $\dim(Ker(f - Id_E)) = 1$, et f est bien une réflexion.

- Réciproquement, les réflexions du plan E sont bien des éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ puisque ce sont des isométries vectorielles, et que leur déterminant vaut -1 (elles se représentent par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base adaptée à la somme directe).

$\square$

ATTENTION !
$-Id_E$ est à la fois une symétrie orthogonale (par rapport au sev $\{0_E\}$) et une rotation (d'angle π), mais **pas une réflexion** car elle est dans $\mathcal{SO}(E)$.

4) Classification des isométries en dimension 2

Théorème 31.
Soit E un espace euclidien de dimension 2 et soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

$\det(f)$	*Forme réduite dans une b.o.n.d adaptée*	$sp(f)$	*Nature géométrique de f*
1	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\emptyset$	*Rotation vectorielle d'angle* $\theta \neq 0\ [\pi]$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	Id_E
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\{-1\}$	$-Id_E$
-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\{1; -1\}$	*Réflexion par rapport à la droite* $Ker(f - Id_E)$

5) Classification selon les invariants

Si $f \in \mathcal{O}(E)$, l'espace $Ker(f - Id_E) = \{x \in E,\ f(x) = x\}$ (formé des vecteurs invariants par f) permet également de déterminer la nature géométrique de f.

En regroupant les résultats des deux paragraphes précédents, on obtient la classification suivante :

Théorème 32.
Soit E un espace euclidien **de dimension 2** *et soit* $\boldsymbol{f \in \mathcal{O}(E)}$.
Alors, la nature géométrique de f dépend uniquement de $\dim(Ker(f - Id_E))$ *:*

$\dim(Ker(f - Id_E))$	*Nature géométrique de f*	$\det(f)$
0	*Rotation vectorielle différente de Id_E*	1
1	*Réflexion par rapport à la droite $Ker(f - Id_E)$*	-1
2	Id_E	1

6) En pratique : étude de $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Etant donnée une **matrice orthogonale** $\boldsymbol{A \neq I_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})}$, on se propose de déterminer les caractéristiques géométriques de l'endomorphisme $f \in \mathcal{O}(E)$ qu'elle représente (dans une base orthonormée directe d'un plan euclidien orienté E).

ATTENTION !
Avant toute chose, ne pas oublier de vérifier que A est bien une matrice orthogonale (en montrant que **la famille des colonnes est orthonormée**).

a) Cas où $\det(A) = 1$

Dans ce cas, on a $\det(f) = 1$, donc $f \in \mathcal{SO}(E)$: f est une **rotation vectorielle**.
On a alors directement son angle $\theta \in]-\pi;\pi]$, puisque

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

b) Cas où $\det(A) = -1$

Dans ce cas, on a $\det(f) = -1$, donc $f \in \mathcal{O}^-(E)$: f est une **réflexion** (symétrie orthogonale par rapport à une droite).
Son axe est la droite $\mathcal{D} = Ker(f - Id_E)$, que l'on calcule en résolvant le système $AX = X$.

VI Groupe orthogonal en dimension 3

Cette fois-ci, on va étudier directement les $f \in \mathcal{O}(E)$, car le groupe matriciel $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ n'est pas aussi simple à décrire que $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
La stratégie est de décomposer l'espace sous la forme $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$, où la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$ sont stables par f, et se ramener (par restriction) à la dimension 2, déjà étudiée.

1) Description de $\mathcal{SO}(E)$

Théorème 33 (Forme réduite d'une isométrie positive).
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{SO}(E)$.
. . . .

(*i*) *Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E*
. . . .

et un réel θ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
. . . .

(*ii*) *Dans* **toute** *base orthonormée directe de E* **qui commence par $\overrightarrow{i}$**, *la matrice de f est la même (θ est unique à 2π près dès que $\overrightarrow{i}$ est construit).*

Preuve : Par hypothèse, f est une isométrie vectorielle telle que $\det(f) = 1$.

(i) • <u>Commençons par montrer que 1 est valeur propre de f :</u>
Le polynôme caractéristique $\chi_f(X) = \det(XId_E - f)$ est un polynôme à coefficients réels dont le terme de plus haut degré est X^3. La fonction $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue, tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et vérifie $\chi_f(0) = \det(-f) = (-1)^3 \det(f) = (-1) \times 1 = -1 < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda > 0$ tel que $\chi_f(\lambda) = 0$. Or, on a déjà vu que les seules valeurs propres réelles possibles pour une isométrie vectorielle sont -1 et 1, donc $\lambda = 1$. Ceci montre que $\chi_f(1) = 0$, donc 1 est valeur propre de f.

- <u>Contruisons maintenant une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E dans laquelle f a la matrice voulue.</u>

  On choisit pour $\overrightarrow{i}$ un vecteur propre de f associé à 1, de norme 1 (il suffit de choisir un vecteur propre et de le diviser par sa norme) : on a donc $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$ avec $\|\overrightarrow{i}\| = 1$.
  On note $\mathcal{D} = Vect(\overrightarrow{i})$. Puisque $\overrightarrow{i}$ est un vecteur propre, la droite $\mathcal{D}$ est stable par f. On complète $\overrightarrow{i}$ en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E. Ainsi, la famille $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée du plan $\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp}$. Puisque $f \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{D}$ est stable par f, on en déduit que le plan $\mathcal{P}$ est également stable par f. La restriction $g = f_{|\mathcal{P}}$ est donc un élément de $\mathcal{O}(\mathcal{P})$, et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ a une forme par blocs :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

  où $A = Mat_{(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(g) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
  Mais $\det(f) = 1$, donc $1 = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f)) = 1 \times \det(A)$, ce qui montre que $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, et donc qu'il existe un réel θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

  Ceci montre (i).

(ii) Soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une autre base orthonormée directe de E. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée de $\mathcal{P} = Vect(\overrightarrow{i})^{\perp}$, comme $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est aussi de la forme :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

où $A' = Mat_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(g) \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (rappelons que $g = f_{|\mathcal{P}} \in \mathcal{SO}(\mathcal{P})$).
Montrons que $A' = A$.
On a $A' = P^{-1}AP$, où $P = Mat_{(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Or, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{P}$ de même orientation, car

$$\det_{(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det(P) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1,$$

(puisque $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont deux bases orthonormées directes de E). On en déduit que P est dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, ainsi que A et P^{-1}, donc puisque $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, il en résulte $A' = P^{-1}AP = P^{-1}PA = A$.

$\square$

Rappel
Dans un espace euclidien E, une droite $\mathcal{D}$ contient exactement deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$ et $-\overrightarrow{i}$. Il y a donc exactement **deux** façons d'orienter une droite. On appelle **axe** toute droite orientée.

Définition 34 (Rotation dans l'espace).
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, soit un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$, et soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors, on appelle **rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{i}$ et d'angle θ** *l'unique endomorphisme $r_{\overrightarrow{i},\theta}$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe de E commençant par $\overrightarrow{i}$.*

Remarque

- En dimension 3, les rotations sont exactement les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ (d'après le théorème précédent).

- Le fait d'orienter l'axe de rotation (en choisissant $\overrightarrow{i}$) donne un "sens trigonométrique" sur le plan $\mathcal{P} = Vect(\overrightarrow{i})^{\perp}$, ce qui permet de mesurer l'angle de rotation. Ce réel θ est unique à 2π près.

- Si on change l'orientation de l'axe, θ devient $-\theta$.
- L'identité est un cas particulier de rotation vectorielle : toute droite orientée joue le rôle d'axe et l'angle est $\theta = 0$.

Dessin :

Parmi ces rotations, signalons un cas particulier intéressant :

Définition 35 (Retournement).
Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle de E. On appelle **retournement d'axe $\boldsymbol{\mathcal{D}}$** *(ou "demi-tour d'axe $\mathcal{D}$") la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle π.*

Remarque
Quelle que soit l'orientation choisie de la droite $\mathcal{D}$, le retournement d'axe $\mathcal{D}$ sera toujours une rotation d'angle π (car $-\pi \equiv \pi\ [2\pi]$).

ATTENTION !
Un retournement est **à la fois** une rotation et une symétrie orthogonale (par rapport à une droite), mais ce n'est pas une réflexion !

2) Description de $\mathcal{O}^-(E)$

Théorème 36 (Forme réduite d'une isométrie négative).
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{O}^-(E)$.
. . . .
Alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E
. . . .
et un réel θ telle que
. . . .

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

. . . .

Remarque
On peut remarquer que le produit des deux matrices est commutatif :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

L'isométrie f est donc la composée commutative de la rotation $r_{\overrightarrow{i},\theta}$ (éventuellement égale à Id_E) et de la réflexion $\sigma_{\{\overrightarrow{i}\}^\perp}$ (par rapport au plan vectoriel normal à $\overrightarrow{i}$) :

$$f = r_{\overrightarrow{i},\theta} \circ \sigma_{\{\overrightarrow{i}\}^\perp} = \sigma_{\{\overrightarrow{i}\}^\perp} \circ r_{\overrightarrow{i},\theta}.$$

Preuve : Par hypothèse, f est une isométrie vectorielle telle que $\det(f) = -1$.
On a donc $-f \in \mathcal{SO}(E)$. En effet, $-f$ est linéaire, conserve la norme comme f puisque $\|(-f)(x)\| = \|-f(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, et $\det(-f) = (-1)^3 \det(f) = -\det(f) = -(-1) = 1$. Donc d'après le théorème précédent, il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E et un réel φ tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(-f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi+\pi) & -\sin(\varphi+\pi) \\ 0 & \sin(\varphi+\pi) & \cos(\varphi+\pi) \end{pmatrix},$$

d'où le résultat en posant $\theta = \varphi + \pi$. $\square$

3) Classification des isométries en dimension 3

Théorème 37.
Soit E un espace euclidien de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

$\det(f)$	*Forme réduite dans une b.o.n.d adaptée*	$sp(f)$	*Nature géométrique de f*
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\{1\}$	*Rotation vectorielle d'axe* $Ker(f - Id_E)$ $f = r_{\vec{i},\theta}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\{1; -1\}$	*Demi-tour (rotation d'angle* π*) d'axe* $Ker(f - Id_E)$ $f = r_{\vec{i},\pi}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$f = Id_E$

$\det(f)$	*Forme réduite dans une b.o.n.d adaptée*	$sp(f)$	*Nature géométrique de f*
-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\{-1\}$	*Anti-rotation* $f = r_{\overrightarrow{i},\theta} \circ \sigma_{\{\overrightarrow{i}\}^{\perp}}$
-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\{-1\}$	*Anti-rotation* $f = -Id_E = r_{\overrightarrow{i},\pi} \circ \sigma_{\{\overrightarrow{i}\}^{\perp}}$.
-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{-1;1\}$	*Réflexion de plan* $Ker(f - Id_E) = \{\overrightarrow{i}\}^{\perp}$ $f = \sigma_{\{\overrightarrow{i}\}^{\perp}}$

4) Classification selon les invariants

En dimension 3, on a donc $\boldsymbol{\mathcal{SO}(E)}$ **qui n'est formé que de rotations** comme en dimension 2. Mais en dimension 3, l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{O}^-(E)}$ **n'est pas uniquement constitué de réflexions**, il y a aussi les "anti-rotations" (composées commutatives d'une rotation et d'une réflexion).

Théorème 38 (Classification des isométries vectorielles en dimension 3).
Soit E un espace euclidien **de dimension 3** *et soit* $\boldsymbol{f \in \mathcal{O}(E)}$.
Alors, la nature géométrique de f dépend uniquement de $\dim(Ker(f - Id_E))$ *:*

$\dim(Ker(f - Id_E))$	*Nature géométrique de f*	$\det(f)$
0	*Anti-rotation ($-f$ est une rotation)*	-1
1	*Rotation d'axe $Ker(f - Id_E)$*	1
2	*Réflexion de plan $Ker(f - Id_E)$*	-1
3	Id_E	1

5) En pratique : étude de $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$

Etant donnée une **matrice orthogonale $\boldsymbol{A \neq I_3 \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})}$**, on se propose de déterminer les caractéristiques géométriques de l'endomorphisme $f \in \mathcal{O}(E)$ qu'elle représente (dans une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3).

ATTENTION !
Avant toute chose, ne pas oublier de vérifier que A est bien une matrice orthogonale (en montrant que **la famille des colonnes est orthonormée**).

a) Cas où $\det(A) = 1$

Dans ce cas, $f \in \mathcal{SO}(E)$, c'est donc une rotation de E.

- **Calcul de l'axe de rotation** :

$$\mathcal{D} = Ker(f - Id_E)$$

  Pour le déterminer, on résout le système $AX = X$.

- **Calcul de l'angle de la rotation** :

  On commence par orienter l'axe, en choisissant un vecteur unitaire $\overrightarrow{i} \in \mathcal{D}$.
  Ensuite, pour calculer l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ de la rotation f (**qui dépend de l'orientation choisie sur l'axe**), on utilise le lemme suivant :

Lemme 39 (Calcul de l'angle d'une rotation de l'espace).
Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$ la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{i}$ (unitaire) et d'angle $\theta \in]-\pi;\pi]$. Alors,

(i) On a la formule $Tr(f) = 1 + 2\cos\theta$.

(ii) Si on fixe un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ non colinéaire à $\overrightarrow{i}$, on a

$$\text{signe}\,(\sin\theta) = \text{signe}\left(\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))\right).$$

pour **toute** *base orthornormée* **directe** $\mathcal{B}$ *de* E.

Preuve :

(i) Si on complète $\overrightarrow{i}$ en une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E, alors

$$Mat_{(i,j,k)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } Tr(f) = Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1 + 2\cos\theta.$$

(ii) Soit $\overrightarrow{x} \notin Vect(\overrightarrow{i})$. Fixons $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E.
Puisque (i, j, k) est aussi orthonormée directe, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) = \det_{(i,j,k)}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})).$$

En notant $[x]_{(i,j,k)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, on a

$$[f(x)]_{(i,j,k)} = Mat_{(i,j,k)}(f) \times [x]_{(i,j,k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta \\ \beta\sin\theta + \gamma\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta \\ 0 & \gamma & \beta\sin\theta + \gamma\cos\theta \end{vmatrix} = (\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta.$$

On en déduit le signe de $\sin(\theta)$ puisque $\beta^2 + \gamma^2 > 0$ (ce réel positif est non nul sinon, on aurait $\beta = \gamma = 0$, ce qui entraînerait $\overrightarrow{x} \in Vect(\overrightarrow{i})$ (absurde).

$\square$

b) **Cas où** $\det(A) = -1$

Dans ce cas, $f \in \mathcal{O}^-(E)$.

- <u>**On détermine si f est une réflexion ou une anti-rotation**</u> :
  * soit en calculant la dimension de $Ker(f - Id_E)$.
    (2 pour une réflexion, 0 pour une anti-rotation).
  * soit en utilisant que f est une symétrie $\iff$ A est symétrique (puisque $f \in \mathcal{O}(E)$).
- <u>**Dans le cas d'une réflexion**</u> :
  Le plan de symétrie est $Ker(f - Id_E)$ (on le détermine en résolvant $AX = X$).
- <u>**Dans le cas d'une anti-rotation**</u> :
  On étudie $-f$, qui est une rotation : on trouve son axe, on l'oriente par $\overrightarrow{i}$ et on trouve son angle φ.
  On en déduit que f est la composée commutative de la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{i}$ et d'angle $\theta = \varphi + \pi$ et de la réflexion de plan $\{\overrightarrow{i}\}^\perp$.

c) Exemples

Exemple

Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est la rotation d'axe $\mathcal{D} = Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$ (orienté par ce vecteur) et d'angle $\theta = -\arccos(-\frac{5}{14})$.

Exemple

Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est la composée commutative :

* de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

* et de la réflexion de plan vectoriel d'équation $\{x + y = 0\}$.