

Chapitre 14 Séries de Fourier

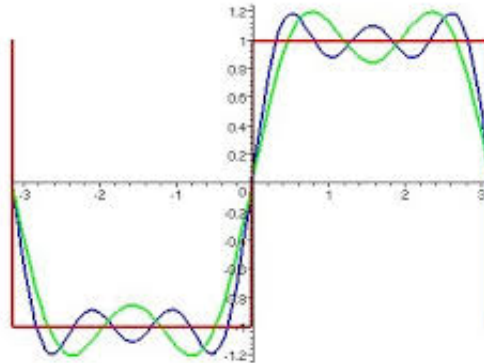


Table des matières

I Définitions générales	1
1) Fonctions de classe \mathcal{C}^k par morceaux, fonctions périodiques	1
2) Modes de Fourier T -périodiques	7
3) Coefficients de Fourier trigonométriques	8
4) Série de Fourier	10
5) Cas où certains coefficients de Fourier sont nuls	15
II Formule de Parseval	22
1) Enoncé	22
2) Application au calcul de sommes	23
III Convergence des séries de Fourier	24
1) Théorème de Dirichlet	24
2) Application au calcul de sommes	27
IV Interprétations géométriques	29

I Définitions générales

Dans tout ce chapitre, on considèrera des fonctions à valeurs réelles.

1) Fonctions de classe \mathcal{C}^k par morceaux, fonctions périodiques

Définition 1 (Fonction de classe \mathcal{C}^k par morceaux).

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

(i) Soit $[a, b]$ un **segment** de \mathbb{R} (avec $a \leq b$).

.....
 On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux si

.....
 il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$ telle que pour tout

.....
 $i \in \{0, \dots, p-1\}$, la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ possède un prolongement

.....
 de classe \mathcal{C}^k sur $[x_i, x_{i+1}]$.

(ii) Soit I un intervalle **quelconque** de \mathbb{R} .

.....
 On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux si

.....
 sa restriction à tout segment $[a, b] \subset I$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux .

.....

Remarque

Dans la suite, on utilisera surtout les cas où $k = 0$ (fonctions continues par morceaux, déjà étudiées au chapitre 6), et $k = 1$ (fonctions de classe \mathcal{C}^1 par morceaux).

Remarque

- f de classe $\mathcal{C}^1 \implies f$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux $\implies f$ continue par morceaux, et les implications réciproques sont fausses.
- Toute fonction en escalier est de classe \mathcal{C}^∞ par morceaux, puisqu'elle est "constante par morceaux".

ATTENTION !

Une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux n'est pas nécessairement continue !

Méthode (En pratique)

- Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux si et seulement si :
 - * f est continue sur chaque ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ de la subdivision ;
 - * f admet des limites finies en x_i^+ et x_{i+1}^- pour tout i .
- Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si et seulement si :
 - * f est de classe \mathcal{C}^1 sur chaque ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ de la subdivision ;
 - * f admet des limites finies en x_i^+ et x_{i+1}^- ;
 - * f' admet des limites finies en x_i^+ et x_{i+1}^- .
 (d'après le "théorème de la limite de la dérivée").

Dans la suite, on va s'intéresser à des fonctions périodiques (et au moins continues par morceaux).

Rappel (Fonction T -périodique)

Soit un réel $T > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. Dans ce cas, tout segment de la forme $[a; a + T]$ est appelé une période de f .

Lemme 2 (Caractérisation des fonctions \mathcal{C}^k par morceaux périodiques).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et soit $k \in \mathbb{N}^ \cup \{+\infty\}$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$:*

f est \mathcal{C}^k par morceaux \iff la restriction $f|_{[a, a+T]}$ est \mathcal{C}^k par morceaux.

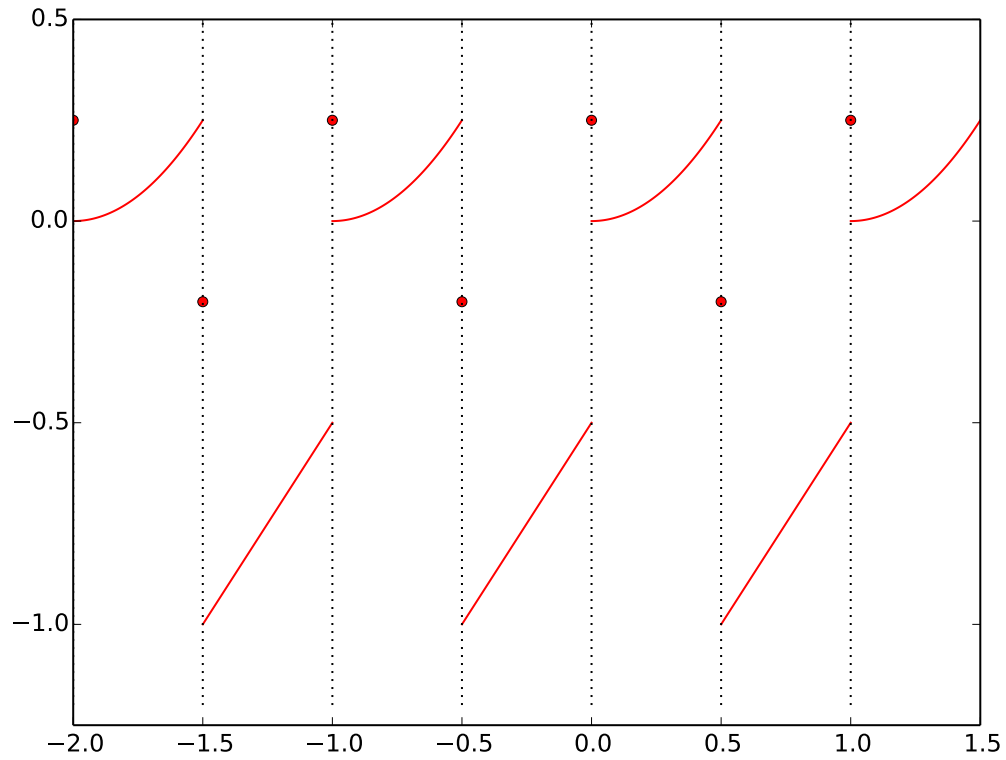
Méthode

Il suffit donc de se restreindre à une période **fermée** pour montrer qu'une fonction périodique est de classe \mathcal{C}^k par morceaux.

Preuve : L'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est évidente.

Pour l'implication $\boxed{\Leftarrow}$: par hypothèse, la restriction $f|_{[a, a+T]}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux. Par périodicité, $f|_{]a-T, a[}(x) = f|_{]a, a+T[}(x + T)$, donc $f|_{]a-T, a[}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux. En outre, le comportement de f en a^- est le même qu'en $(a + T)^-$,

donc on obtient que la restriction $f|_{[a-T, a+T]}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux. Egalement, le comportement de f en $(a - T)^+$ est le même que celui en a^+ , donc on obtient que $f|_{[a-T, a+T]}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux. En itérant, on obtient que la restriction de f à tout segment $[a - nT, a + nT]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est de classe \mathcal{C}^k par morceaux, ce qui assure que la restriction de f à tout segment de \mathbb{R} est \mathcal{C}^k par morceaux, puisque tout segment de \mathbb{R} est contenu dans un segment de la forme $[a - nT; a + nT]$. \square



Notation

Dans la suite, pour $T > 0$, on notera

- $\mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et T -périodiques.
- $\mathcal{C}_{M,T}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et T -périodiques.
- $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et T -périodiques.

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 3 (Structure d'espace vectoriel).

Soit un réel $T > 0$. Les ensembles $\mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{M,T}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

2) Modes de Fourier T -périodiques

Proposition 4 (Modes de Fourier associés à une période $T > 0$).

*Soit un réel $T > 0$. On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la **pulsation** associée à la période T .*

*On appelle **modes de Fourier associés à la période T** les fonctions*

$(t \mapsto \cos(n\omega t))_{n \in \mathbb{N}}$, $(t \mapsto \sin(k\omega t))_{k \in \mathbb{N}^}$.*

Remarque

- Les $t \mapsto \cos(n\omega t)$ sont paires et les $t \mapsto \sin(k\omega t)$ sont impaires.
- Ces fonctions sont continues (évident) et T -périodiques car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\omega(t+T)) = \cos(n\omega t + n\omega T) = \cos(n\omega t + 2n\pi) = \cos(n\omega t),$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(k\omega(t+T)) = \sin(k\omega t + k\omega T) = \sin(k\omega t + 2k\pi) = \sin(k\omega t),$$

vu que $\omega T = 2\pi$ (par définition de la pulsation).

- T est la plus petite période commune à tous les éléments de cette famille de fonctions.

Exemple (Deux cas classiques)

- Si $T = 2\pi$, alors $\omega = 1$, et les modes de Fourier associés sont $t \mapsto 1, t \mapsto \cos(t), t \mapsto \cos(2t), \dots, t \mapsto \sin(t), t \mapsto \sin(2t), t \mapsto \sin(3t), \dots$
- Si $T = 1$, alors $\omega = 2\pi$, et les modes de Fourier associés sont $t \mapsto 1, t \mapsto \cos(2\pi t), t \mapsto \cos(4\pi t), \dots, t \mapsto \sin(2\pi t), t \mapsto \sin(4\pi t), t \mapsto \sin(6\pi t), \dots$

3) Coefficients de Fourier trigonométriques

Définition 5 (Coefficients de Fourier d'une fonction périodique).

Soient $T > 0, f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On appelle coefficients de Fourier de f les nombres réels

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} .$$

ATTENTION !

L'expression des $(a_n(f))_{n \geq 1}$ est différente de celle de $a_0(f)$!

Méthode

- Le premier coefficient $a_0(f)$ est la valeur moyenne de f sur une période.
- On peut calculer les coefficients de Fourier en intégrant sur n'importe quel intervalle de largeur T car les fonctions $t \mapsto f(t) \cos(n\omega t)$ et $t \mapsto f(t) \sin(n\omega t)$ sont T -périodiques (voir CH.6). On a ainsi :

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R});$$

.....

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R});$$

.....

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

.....

En pratique : on choisira l'intervalle d'intégration le mieux adapté à l'exemple étudié (pour une fonction paire/impair, on choisira évidemment $[-T/2; T/2]$ au lieu de $[0; T]$, afin d'exploiter les symétries de f).

4) Série de Fourier

Définition 6 (Série de Fourier d'une fonction périodique).

Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle

série de Fourier de f au point x la série

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x)),$$

.....
 où les $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$, sont les coefficients de Fourier de f , et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

.....
 La somme partielle d'ordre n (appelée **somme de Fourier d'ordre n de f**) est

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x)).$$

.....
 Si la série de Fourier de f au point x converge, alors sa somme sera notée :

$$S(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x)).$$

.....

ATTENTION !

Une série de Fourier est une "**série de fonctions**" : pour chaque point $x \in \mathbb{R}$, on a une série numérique dont le terme général dépend de x , comme pour une série entière.

Exemple (Fonction "partie décimale")

On considère la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$, où $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la partie entière.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $T > 0$ à préciser.
2. Représenter le graphe de f .
3. Calculer les coefficients de Fourier de f .
4. Déterminer la série de Fourier de f en tout point $x \in \mathbb{R}$.

1. La fonction partie entière E est en escalier, donc continue par morceaux sur \mathbb{R} . Par somme avec la fonction continue $x \mapsto x$, on en déduit que f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

De plus, f est T -périodique avec $T = 1$ car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x+1 - E(x) - 1 = f(x).$$

On a donc $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $T = 1$.

2. Pour tout $x \in [0; 1[$, $E(x) = 0$ donc $f(x) = x$. En outre, $f(1) = 1 - E(1) = 0$. Par périodicité, on en déduit facilement le graphe de f :

3. Calculons les coefficients de Fourier de f . On a

$$a_0(f) = \frac{1}{1} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en effectuant une IPP :

$$a_n(f) = \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \cos(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi nt) dt = 0,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \sin(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi nt) dt = -\frac{1}{n\pi}.$$

(ici, on a $\omega = 2\pi$).

4. D'après la question précédente, la série de Fourier de f au point $x \in \mathbb{R}$ est :

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x)) = \frac{1}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi nx).$$

5) Cas où certains coefficients de Fourier sont nuls

Proposition 7 (Coefficients de Fourier d'une fonction paire/impaire).

Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(i) Si f est **paire**, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$, donc la série de Fourier de f au point x s'écrit $a_0(f) + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos(n\omega x)$.

(ii) Si f est **impaire**, alors $a_0(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = 0$, donc la série de Fourier de f au point x s'écrit $\sum_{n \geq 1} b_n(f) \sin(n\omega x)$.

Preuve : Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto f(t) \sin(n\omega t)$ est impaire (comme produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire). On en déduit d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction impaire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt = 0.$$

On raisonne de même si f est impaire (on a $t \mapsto f(t) \cos(n\omega t)$ impaire).

□

Proposition 8 (Coeff. de Fourier dans le cas d'une symétrie de glissement).

Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ ("symétrie de glissement").

Alors les coefficients de Fourier d'indices pairs de f sont nuls, c'est-à-dire

$$a_0(f) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2k}(f) = b_{2k}(f) = 0.$$

La série de Fourier de f au point x s'écrit donc

$$\sum_{k \geq 0} (a_{2k+1}(f) \cos((2k+1)\omega x) + b_{2k+1}(f) \sin((2k+1)\omega x)).$$

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt + \int_{T/2}^T f(t) \cos(n\omega t) dt \right).$$

En effectuant le changement de variable $u = t - \frac{T}{2}$ dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{T/2}^T f(t) \cos(n\omega t) dt &= \int_0^{T/2} f\left(u + \frac{T}{2}\right) \cos\left(n\omega\left(u + \frac{T}{2}\right)\right) du \\ &= \int_0^{T/2} -f(u) \cos(n\omega u + n\pi) du \quad , \\ &= -\int_0^{T/2} (-1)^n f(u) \cos(n\omega u) du \end{aligned}$$

et donc en rassemblant les deux intégrales :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{T/2} (1 - (-1)^n) f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

D'où $a_n(f) = 0$ si n est pair.

De même on montre que $a_0(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{T/2} (1 - (-1)^n) f(t) \sin(n\omega t) dt = 0$ si n est pair.



Exemple (Signal en créneaux)

Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire, et telle que $g(t) = 1$ pour $t \in]0; \pi[$ et $g(\pi) = 0$.

1. Représenter le graphe de g .
2. Déterminer la série de Fourier de g .

1. Graphe : puisque g est impaire, on a $g(0) = 0$ et $g(t) = -1$ pour $t \in]-\pi; 0[$, donc g est connue sur $] - \pi, \pi]$. Par 2π -périodicité, on déduit le graphe complet de f en translatant le motif.

2. Puisque g est impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par parité de $t \mapsto g(t) \sin(nt)$:

$$b_n(g) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt,$$

c'est-à-dire

$$b_n(g) = -\frac{2}{n\pi} [\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n),$$

d'où $b_n(g) = 0$ si n est pair et $b_n(g) = \frac{4}{n\pi}$ si n est impair. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de g au point x est donc

$$\sum_{k \geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x).$$

Remarque

Le fait que les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ soient nuls pour n pair s'explique par la présence d'une symétrie de glissement, évidente sur le graphe de f .

II Formule de Parseval

1) Énoncé

Théorème 9 (Formule de Parseval).

Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^}$ les coefficients de Fourier de f .*

Alors les séries $\sum_{n \geq 1} a_n(f)^2$ et $\sum_{n \geq 1} b_n(f)^2$ convergent, et on a

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Preuve : Admis, c'est un théorème difficile. Mais on donnera quand même une interprétation géométrique de ce théorème dans la dernière section. \square

2) Application au calcul de sommes

Exemple (Fonction "partie décimale")

Reprenons la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ (où E désigne la partie entière).

En appliquant la formule de Parseval, calculer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On a vu que $f \in \mathcal{C}_{M,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, et les coefficients de Fourier valent :

$$a_0(f) = \frac{1}{2},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 0, \quad b_n(f) = -\frac{1}{n\pi}.$$

D'après la formule de Parseval, on a

$$\frac{1}{1} \int_0^1 f(t)^2 dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

III Convergence des séries de Fourier

Dans certains cas, la série de Fourier d'une fonction périodique f converge, et on peut calculer sa somme $S(f)(x)$.

1) Théorème de Dirichlet

Théorème 10 (Théorème de Dirichlet).

Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f au point x converge et

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f \right).$$

Preuve : Admis, c'est un théorème difficile. □

ATTENTION !

Ici, l'hypothèse sur f est plus exigeante que dans la formule de Parseval : il faut que f soit de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, et pas simplement continue par morceaux.

Remarque

- Reformulation : en tout point $x \in \mathbb{R}$, la suite des sommes de Fourier

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x))$$

converge vers **la moyenne des limites à gauche et à droite de f en x** lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- En notant $S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x))$, cela se réécrit :

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h)).$$

- On appelle **fonction régularisée de f** la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h))$.
- On comprend très bien qu'en général, on n'a pas $S(f)(x) = f(x)$. En effet, si on modifie la valeur de f seulement au point x , les coefficients de Fourier ne changent pas (puisque ce sont des intégrales), et donc la série $S(f)(x)$ non plus. Il serait donc absurde que $S(f)(x)$ ne dépende que d'une valeur ponctuelle de f .

Remarque (Cas où f est continue sur \mathbb{R})

Si f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux **et continue sur \mathbb{R}** , alors on aura

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} \left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f \right) = \frac{1}{2} (f(x) + f(x)) = f(x),$$

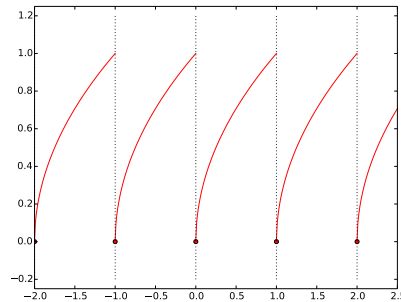
et donc d'après le théorème de Dirichlet, on aura $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(f)(x) = f(x)$.

Dans ce cas, f est **développable en série de Fourier**, c'est-à-dire qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, f est égale à sa série de Fourier.

ATTENTION !

L'hypothèse \mathcal{C}^1 par morceaux est indispensable !

Le théorème de Dirichlet ne s'applique pas dans le cas où le graphe de f présente une tangente verticale (si par exemple la dérivée f' tend vers $+\infty$ en un point).



2) Application au calcul de sommes

Exemple (Fonction "partie décimale")

En appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$, montrer que la

série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et calculer sa somme.

On a vu auparavant que la série de Fourier de f au point $x \in \mathbb{R}$ est

$$\frac{1}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi nx).$$

Pour montrer que cette série converge et calculer sa somme, appliquons le théorème de Dirichlet : la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux car :

- elle est 1-périodique, donc il suffit d'étudier la restriction de f à la période fermée $[0; 1]$, notée $\tilde{f} = f|_{[0;1]}$;
- on a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

donc \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1[$ et admet un prolongement de classe \mathcal{C}^1 au segment $[0; 1]$, puisque $\tilde{f} : x \mapsto x$ et $\tilde{f}' : x \mapsto 1$ admettent une limite finie en 1^- .

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc la convergence de la série de Fourier de f en x , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi nx) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f \right)$$

En évaluant en $x = \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\sin(2\pi nx) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} ,$$

donc

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2} \left(\lim_{(1/4)^-} f + \lim_{(1/4)^+} f \right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

(car f est continue au point $1/4$). Finalement, on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

IV Interprétations géométriques

On fixe une période $T > 0$, et on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On travaille ici avec des fonctions **continues** sur \mathbb{R} et T -périodiques.

Notation

Dans la suite, on va adopter la notation suivante pour les modes de Fourier associés à la période T :

$$c_0 : x \mapsto 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n : x \mapsto \cos(n\omega x), \quad s_n : x \mapsto \sin(n\omega x).$$

Proposition 11 (Structure préhilbertienne de $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonctions réelles continues et T -périodiques)

l'application $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt$.

*est un **produit scalaire**.*

La norme associée à ce produit scalaire est $\forall f \in E, \|f\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt}$.

Proposition 12 (Les modes de Fourier sont orthogonaux).

Dans l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la famille $(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n, \dots)$ est orthogonale, et on a $\|c_0\| = 1$, ainsi que $\forall n \in \mathbb{N}^$, $\|c_n\| = \|s_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Preuve : Voir l'exercice 7 du TD12. □

Remarque

Ceci montre en particulier que la famille des modes de Fourier est **libre** (on rappelle que toute famille orthogonale **formée de vecteurs non nuls** est libre).

ATTENTION !

Cette famille n'est **pas orthonormée**.

On en déduit (en normalisant chaque vecteur) le corollaire suivant :

Corollaire 13 (Famille orthonormée de modes de Fourier).

Dans l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la famille $(c_0, \sqrt{2}c_1, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_n, \dots)$ est orthonormée.

On utilise cette famille orthonormée pour montrer le résultat suivant :

Proposition 14 (Interprétation géométrique des sommes de Fourier).

Soit $f \in E = \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la somme partielle de Fourier $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel de dimension finie

$$F_n = \text{Vect}(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n)$$

Remarque

On a $\dim(F_n) = 2n + 1$.

Preuve : Puisque la famille $(c_0, \sqrt{2}c_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}s_n)$ est orthonormée (donc libre) et formée de vecteurs de F_n , on en déduit que c'est une base orthonormée de F_n (et donc $\dim(F_n) = 2n + 1$).

On dispose donc d'une expression directe de la projection orthogonale sur le sous-espace F_n (voir le chapitre 12) : pour tout $f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$p_{F_n}(f) = \langle f; c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^n \langle f; \sqrt{2}c_k \rangle \sqrt{2}c_k + \sum_{k=1}^n \langle f; \sqrt{2}s_k \rangle \sqrt{2}s_k.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 p_{F_n}(f)(x) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sqrt{2} c_k(t) dt \right) \sqrt{2} c_k(x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sqrt{2} s_k(t) dt \right) \sqrt{2} s_k(x) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{2}{T} \int_0^T f(t) c_k(t) dt \right) c_k(x) + \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(t) s_k(t) dt \right) s_k(x) \right) \\
 &= a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) c_k(x) + b_k(f) s_k(x)) = S_n(f)(x).
 \end{aligned}$$

□

Remarque (Interprétation géométrique de la formule de Parseval si f est continue)

Si $f \in C_T^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, la formule de Parseval se réécrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2.$$

En effet : pour n fixé, dans le sous-espace F_n muni de sa base orthonormée

$$(c_0, \sqrt{2}c_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}s_n),$$

le vecteur

$$S_n(f) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f)c_k + b_k(f)s_k)$$

a pour coordonnées $\left(a_0(f), \frac{a_1(f)}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_n(f)}{\sqrt{2}}, \frac{b_1(f)}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{b_n(f)}{\sqrt{2}}\right)$, donc le carré de sa norme vaut

$$\|S_n(f)\|^2 = a_0(f)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k(f)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_k(f)}{\sqrt{2}}\right)^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k(f)^2 + b_k(f)^2),$$

donc

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f)^2 + b_k(f)^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f)\|^2,$$

ainsi que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \langle f; f \rangle = \|f\|^2.$$