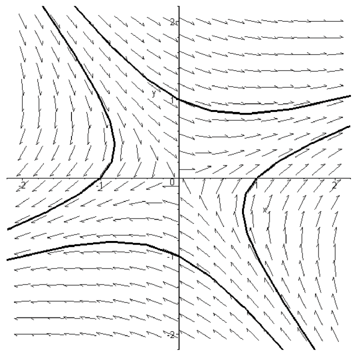
Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

# Chapitre 11
# Equations différentielles linéaires



# Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

# I Généralités sur les équations différentielles linéaires

## 1) Définition et terminologie

**Définition 1 (Équation différentielle linéaire d'ordre $n$).**

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une* **équation différentielle linéaire d'ordre $n$** *est une équation de la forme*

$$(E): \quad a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t),$$

*où :*

- *les $a_i : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues, appelées les coefficients de $(E)$ ;*
- *$b : I \to \mathbb{K}$ est continue, et est appelée le second membre de $(E)$ ;*
- *l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ $n$-fois dérivable.*

*On appelle* **équation homogène associée à** *$(E)$ l'équation différentielle linéaire*

$$(H): \quad a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

**Notation**
En général, une équation différentielle linéaire se note de manière abrégée :

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

(on ne rappelle pas la dépendance de $y$ en $t$).

**ATTENTION !**
La notation « $y(t)$ » pour l'inconnue n'est pas figée (même si traditionnellement $t$ désigne « le temps »). On peut par exemple noter

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

où dans ce cas, l'inconnue $y$ dépend (implicitement) de la variable $x$.

**Remarque**
Le cas $n = 1$ a été étudié en TSI 1 : ce sont les équations du premier ordre, de la forme :

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t).$$

**Exemple**

- L'équation $\boxed{ty'' + t^2y' - 6\ln(t)y = \cos(t)}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Ici, les coefficients sont $a_0(t) = -6\ln(t)$, $a_1(t) = t^2$ et $a_2(t) = t$, le second membre est $b(t) = \cos(t)$, et ce sont des fonctions continues $I \to \mathbb{R}$, avec $I = ]0, +\infty[$.

- L'équation $\boxed{y'''(t) + y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3. Ici, les coefficients sont constants, et le second membre est à valeurs complexes :

$$a_0(t) = a_3(t) = 1, \qquad a_1(t) = a_2(t) = 0, \qquad b(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

- L'équation $\boxed{y^{(3)} + y^2 = t}$ est une équation différentielle **non** linéaire (d'ordre 3). La non-linéarité vient du $y^2$ (qui est un produit, et non pas une dérivée seconde !).
- L'équation $\boxed{y \times y'' = t}$ est une équation différentielle **non** linéaire (d'ordre 2). La non-linéarité vient du produit $y \times y''$.

**Notation**
Dans la suite de cette partie I, on notera

$$(E) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)} = b(t)$$

avec $a_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, et on notera :

$$(H) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)} = 0$$

(l'équation homogène associée).

## 2) Structure de l'ensemble des solutions sur un intervalle

**Définition 2 (Solution sur un intervalle *I*).**
*On appelle* **solution de** $(E)$ **sur** $I$ *toute fonction* $f : I \to \mathbb{K}$ *n-fois dérivable*
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*telle que :* $\forall t \in I, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t) f^{(k)}(t) = b(t).$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Notation**
On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de $(E)$ sur l'intervalle $I$, et $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de $(H)$ sur l'intervalle $I$.

**Proposition 3 (Structure de l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{H})$).**
*L'ensemble* $\mathcal{S}_I(H)$ *des solutions de* $(H)$ *sur* $I$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**ATTENTION !**
Il s'agit bien là d'une équation différentielle linéaire **homogène**. S'il y a un second membre, ça ne marche pas !

**Preuve** : Montrons que $\mathcal{S}_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

- La fonction nulle $\tilde{0} : I \to \mathbb{K}$ est évidemment une solution de $(H)$ sur $I$ (puisque ses dérivées sont toutes nulles et le second membre est nul).
- Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux solutions de $(H)$ sur $I$. Ce sont des fonctions $n$-fois dérivables qui vérifient

$$\forall t \in I, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k(t) f^{(k)}(t) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k(t) g^{(k)}(t) = 0.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + g$ est aussi $n$-fois dérivable sur $I$ et

$$\forall t \in I, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k(t)(\lambda f + g)^{(k)}(t) = \lambda \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(t) f^{(k)}(t)\right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(t) g^{(k)}(t)}_{=0} = 0,$$

ce qui montre que $\lambda f + g$ est solution de $(H)$ sur $I$.

L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ contient la fonction nulle, et est stable par somme et produit externe, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

$\square$

**Remarque**

On verra plus loin que, dans certains cas, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$ est de dimension finie et on pourra calculer sa dimension.

**Proposition 4 (Structure de l'ensemble des solutions de ($\boldsymbol{E}$)).** *Si on connaît une solution particulière de $(E)$ sur $I$, notée $y_p : I \to \mathbb{K}$, alors*

$$\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p = \{y + y_p,\ y \text{ solution de } (H)\}.$$

**Preuve** : Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction $n$-fois dérivable. Montrons l'équivalence :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff y - y_p \text{ solution de } (H) \text{ sur } I.$$

Par hypothèse, on a $\sum_{k=0}^{n} a_k(t) y_p^{(k)} = b(t)$. Donc

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)} = b(t) \\ &\iff \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y_p^{(k)} \\ &\iff \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t) (y - y_p)^{(k)} = 0 \\ &\iff y - y_p \text{ solution de } (H) \end{aligned}$$

(toutes ces égalités ayant lieu pour $t \in I$). Ceci montre que les éléments $y \in \mathcal{S}_I(E)$ sont exactement les éléments de $\mathcal{S}_I(H)$ auxquels on rajoute la fonction $y_p$. $\square$

**ATTENTION !**
Ce résultat s'applique **s'il existe des solutions de $(\boldsymbol{E})$ sur $\boldsymbol{I}$**.
Dans certains cas, on aura $\mathcal{S}_I(E) = \emptyset$, i.e. $(E)$ ne possède pas de solutions sur $I$.
Par contre, pour une éq. homogène, on a toujours $\mathcal{S}_I(H) \neq \emptyset$ (il y a la solution nulle).

## 3) Principe de superposition

**Proposition 5 (Principe de superposition).**
*On considère les deux équations différentielles :*

$$(E_1) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)} = b_1(t), \qquad\qquad (E_2) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)} = b_2(t).$$

*Si $y_1 \in \mathcal{S}_I(E_1)$ et $y_2 \in \mathcal{S}_I(E_2)$, alors la somme $y_1 + y_2$ est une solution sur $I$ de*

$$(E_3) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)} = b_1(t) + b_2(t).$$

**Preuve** : Par hypothèse : $\forall t \in I$, $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y_1^{(k)}(t) = b_1(t)$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y_2^{(k)}(t) = b_2(t)$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)(y_1+y_2)^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y_1^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y_2^{(k)}(t) = b_1(t) + b_2(t).$$

□

# II Eq. différentielles linéaires d'ordre 1 (rappels)

Ce sont les équations différentielles du type $\boxed{(E):\ a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t)}$, où $a_0, a_1$ et $d$ sont des fonctions continues $I \to \mathbb{K}$, $I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

## 1) La "forme résolue"

Lorsque $t \mapsto a_1(t)$ ne s'annule pas sur $I$, une telle équation peut se mettre "sous forme résolue" en divisant par $a_1$ :

$$y' + a(t)y = b(t).$$

**Théorème 6 (Résolution d'une éq. d'ordre 1 sous forme résolue).**

*On considère l'équation différentielle* $(E):\ y' + a(t)y = b(t)$ ,

*où* $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ *et* $I$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On note* $(H):\ y' + a(t)y = 0$.

*(i)* *Les solutions de* $(H)$ *sur* $I$ *sont les fonctions de la forme*

$y_h(t) = \alpha e^{-A(t)}$ *avec* $A$ *une primitive de* $a$ *sur* $I$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$ .

*(ii)* *Les solutions de* $(E)$ *sur* $I$ *sont les fonctions de la forme*

$y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ *avec* $A$ *une primitive de* $a$ *sur* $I$ *et* $f'(t) = b(t)e^{+A(t)}$

*pour tout* $t \in I$ *("méthode de variation de la constante")* .

**Preuve** :

$(i)$ Soit $A$ une primitive de $a$ sur $I$ (elle existe car $a$ est continue).

- On vérifie que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la fonction $y_h : t \mapsto \alpha e^{-A(t)}$ est bien solution de $(H)$ :

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = -\alpha A'(t)e^{-A(t)} + \alpha a(t)e^{-A(t)} = 0,$$

car $A'(t) = a(t)$ pour tout $t \in I$.

- Réciproquement, vérifions que toute solution de $(H)$ sur $I$ est bien de cette forme. Pour toute solution $y_h$ de $(H)$, le produit $y_h(t)e^{+A(t)}$ est constant sur l'intervalle $I$, car

$$\frac{d}{dt}\left(y_h(t)e^{+A(t)}\right) = \underbrace{\left(y_h'(t) + a(t)y_h(t)\right)}_{=0} e^{A(t)} = 0.$$

Il existe donc une constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I$, $y_h(t)e^{+A(t)} = \alpha$, ce qui montre la formule voulue : $y_h(t) = \alpha e^{-A(t)}$.

$(ii)$ Cela repose sur un changement d'inconnue.
Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable. Puisque $e^{-A(t)}$ ne s'annule pas sur $I$, on peut poser :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \frac{y(t)}{e^{-A(t)}} = y(t)e^{A(t)},$$

et on a $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$.
Cherchons alors des conditions sur $f$ pour que $y$ soit solution de $(E)$ sur $I$.
La fonction $f$ est dérivable sur $I$ et $\forall t \in I$, $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$, donc

$$y'(t) = f'(t)e^{-A(t)} - a(t)f(t)e^{-A(t)} = f'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t),$$

soit

$$y'(t) + a(t)y(t) = f'(t)e^{-A(t)}$$

donc $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \qquad f'(t)e^{-A(t)} = b(t),$$

c'est-à-dire $f'(t) = b(t)e^{+A(t)}$. Les solutions de $(E)$ sont donc les

$$y(t) = f(t)e^{-A(t)}, \text{ avec } f'(t) = b(t)e^{+A(t)}.$$

$\square$

**Remarque**

- Le choix de la primitive $A$ n'influe en rien sur la forme des solutions.
- La "méthode de variation de la constante" ne fournit pas seulement une solution particulière de $(E)$, elle fournit **directement toutes les solutions de $(E)$**.

**Corollaire 7 (Structure des ensembles de solutions).**
*Avec les notations précédentes* $((H):\ y'+a(t)y=0$ *et* $(E):\ y'+a(t)y=b(t))$ *:*
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$(i)$ *L'espace vectoriel* $\mathcal{S}_I(H)$ *est de dimension* $1$.
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$(ii)$ *L'ensemble* $\mathcal{S}_I(E)$ *est non vide.*
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Preuve** : Une fois la primitive $A$ de $a$ fixée, le théorème précédent montre que

$$\mathcal{S}_I(H)=\{t\mapsto \alpha e^{-A(t)},\ \alpha\in\mathbb{K}\}=Vect_{\mathbb{K}}(t\mapsto e^{-A(t)}),$$

donc la fonction non nulle $t\mapsto e^{-A(t)}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.
Puisque la fonction $t\mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur $I$, elle possède elle aussi des primitives $f$ sur $I$, donc $(E)$ possède des solutions sur $I$. $\square$

**ATTENTION !**

La méthode de variation de la constante n'est pas toujours la meilleure méthode pour résoudre l'équation avec second membre $(E)$. Parfois, il vaut mieux **d'abord vérifier si $(\boldsymbol{E})$ possède une solution particulière $\boldsymbol{y_p}$ triviale** (une constante, un polynôme, une fonction puissance,...), et dans ce cas on a (d'après la prop. 4) : $\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p$.

**Exemple**

Résoudre $\boxed{(E) : \ ty' - y = t\cos(t) - \sin(t)}$ sur l'intervalle $I = ]0; +\infty[$.

Notons $\boxed{(H) : ty' - y = 0}$ l'équation homogène associée. Sur l'intervalle $I$, on a

$$(H) \iff y' - \frac{1}{t}y = 0, \qquad (E) \iff y' - \frac{1}{t}y = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{t}.$$

- **<u>Première méthode</u>** : avec la "méthode de variation de la constante" :
  une primitive de $a : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sur $I$ est $A : t \mapsto -\ln(t)$, donc on a

$$\mathcal{S}_I(H) = \{t \mapsto \alpha e^{\ln(t)},\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto \alpha t,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Les solutions de $(E)$ sont donc sous la forme $y(t) = f(t) * t$, avec $f$ dérivable telle que

$$\frac{d}{dt}(f(t) * t) - \frac{1}{t} * (f(t) * t) = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{t} \iff f'(t) * t = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{t},$$

c'est-à-dire

$$f'(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}.$$

Si on remarque que $\dfrac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)$, on peut alors conclure que les solutions de $(E)$ sont les

$$y(t) = f(t) * t,\ \text{avec}\ f(t) = \frac{\sin(t)}{t} + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{S}_I(E) = \{t \mapsto \alpha t + \sin(t),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- **<u>Seconde méthode</u>** : bien plus astucieuse.
  On trouve une solution évidente de $(H)$ : $ty' - y = 0$ : la fonction $t \mapsto t$.
  Puisqu'on sait que **sur l'intervalle $\boldsymbol{I = ]0; +\infty[}$**, les équations $(E)$ et $(H)$ peuvent se mettre sous forme résolue, l'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ est une droite vectorielle (d'après le corollaire 7), qui contient la fonction $t \mapsto t$. On a donc directement

  $$\mathcal{S}_I(H) = Vect(t \mapsto t) = \{t \mapsto \alpha t,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

  On remarque également que $t \mapsto \sin(t)$ est une solution évidente de

  $$(E) :\ ty' - y = t\cos(t) - \sin(t).$$

  D'après la proposition 4, on a donc

  $$\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + \{t \mapsto \sin(t)\} = \{t \mapsto \alpha t + \sin(t),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

**Théorème 8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations d'ordre 1).**
*Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, l'équation $(E)$ : $y' + a(t)y = b(t)$ (avec $a, b$ continues sur l'intervalle $I$) possède une unique solution sur $I$ qui vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

**Preuve** : Fixons une primitive $A$ de $a$. D'après le théorème 6, les solutions de $(E)$ sur $I$ sont les $y : t \mapsto f(t)e^{-A(t)}$, avec $f'(t) = b(t)e^{A(t)}$, donc

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Les solutions de $(E)$ sont donc les

$$y : t \mapsto \left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds + \alpha\right) e^{-A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

En évaluant en $t = t_0$, on obtient $y(t_0) = \alpha e^{-A(t_0)}$, donc la condition initiale est vérifiée si et seulement si $\alpha = y_0 e^{A(t_0)}$, ce qui montre l'unicité voulue : la solution cherchée est

$$y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds + y_0 e^{A(t_0)}\right) e^{-A(t)}.$$

□

**Vocabulaire**
On appelle **problème de Cauchy linéaire d'ordre 1** le système

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t), & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$, avec $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, et $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
D'après le théorème précédent, ce problème possède donc une unique solution $y$.

## 2) Le cas des formes "non résolues"

**ATTENTION !**

Si $(E)$ : $a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t)$ ne peut pas se mettre "sous forme résolue" (parce que la fonction $a_1$ s'annule sur l'intervalle $I$) alors on peut ne pas avoir existence/unicité des solutions. Le théorème 8 (de Cauchy-Lipschitz) ne s'applique pas sur $I$.

**Méthode**

On résout d'abord $(E)$ sur les intervalles où $t \mapsto a_1(t)$ ne s'annule pas (en mettant sous forme résolue) puis on cherche à "raccorder" les différentes solutions obtenues.

**Exemple**

Résoudre l'équation $\boxed{(H) : \ ty' + 2y = 0}$ :

1. sur $I_1 = ]0, +\infty[$ puis sur $I_2 = ] - \infty, 0[$ ;
2. sur $I = \mathbb{R}$.

1. **Résolution sur $I_1$ ou $I_2$** : Sur chacun des intervalles $I_1$ et $I_2$, la fonction $t \mapsto t$ ne s'annule pas, donc on a
$$ty' + 2y = 0 \iff y' + \frac{2}{t}y = 0.$$
Les solutions sur $I_1$ sont donc les fonctions $t \mapsto \alpha e^{-2\ln(t)} = \frac{\alpha}{t^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Sur $I_2$, idem.

2. **Résolution sur** $\mathbb{R}$ : si $y$ est solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t^2} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\beta}{t^2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

De plus, en évaluant en $t = 0$ l'équation $(H)$, on obtient $0 * y'(0) + 2y(0) = 0$, c'est-à-dire $y(0) = 0$. Mais $y$ est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue en 0, ce qui impose que $\alpha = \beta = 0$ (sinon, $y$ possèdera des limites infinies en 0). L'équation $ty' + 2y = 0$ admet donc une seule solution sur $\mathbb{R}$ : la fonction nulle.

**Remarque**

- Dans cet exemple, on a donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ (ce n'est pas une droite vectorielle, alors que $\mathcal{S}_{]0;+\infty[}(H)$ et $\mathcal{S}_{]-\infty;0[}(H)$ sont des droites vectorielles).
- On a donc un exemple de problème de Cauchy qui ne possède pas de solutions :

$$\begin{cases} ty' + 2y = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

En effet, on ne peut pas ici imposer la valeur de $y$ en 0, car l'équation $(H)$ évaluée en $t = 0$ entraîne la condition $y(0) = 0$.

# III Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Les systèmes différentiels linéaires constituent la généralisation des équations différentielles linéaires d'ordre 1. Ce sont, en effet, des équations différentielles **vectorielles** d'ordre 1, c'est-à-dire des systèmes d'équations différentielles à plusieurs inconnues.

## 1) Définition et terminologie

**Définition 9 (Système différentiel linéaire à coefficients constants).**

*(i)* *Un* ***système différentiel linéaire à coefficients constants*** *est un système d'équations différentielles de la forme*

$$(E) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{1,1}x_1(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{2,1}x_1(t) + \cdots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n,1}x_1(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{array} \right. ,$$

*où $n \in \mathbb{N}^*$, les $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sont des coefficients dans $\mathbb{K}$ et les $b_i : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues. Les inconnues $x_1, \cdots, x_n$ sont des fonctions dérivables $I \to \mathbb{K}$* .

*(ii)* *Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :*

$$(E):\ X'(t) = AX(t) + b(t), \text{ avec :}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *(la matrice du système)* ;
- $b : I \to \mathbb{K}^n$ *défini par* $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ *(le second membre)* ;
- $X : I \to \mathbb{K}^n$ *définie par* $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *(l'inconnue vectorielle)* .

*(iii)* *On appelle* **système homogène associé à** $(E)$ *le système différentiel*

$$(H):\quad X'(t) = AX(t).$$

**Remarque**

- Dans le cas $n = 1$, on retrouve une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
- On rappelle que pour les fonctions vectorielles $I \to \mathbb{K}^n$, la dérivation se fait "composante par composante".
- En général, on note les systèmes différentiels linéaires sous forme abrégée :

$$X' = AX + b(t).$$

- On peut également considérer des systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants, mais nous ne les étudierons pas ici (la théorie est bien plus complexe).

**Exemple ($n = 2$)**

$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + \mathrm{e}^t \end{cases}$ est un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Sous forme matricielle, il s'écrit $X'(t) = AX(t) + b(t)$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

.........................................................

## 2) Structure de l'ensemble des solutions d'un syst. homogène

**Théorème 10 (Structure des solutions du système $X' = AX$).**
*On considère un système différentiel* **homogène** *et à coefficients constants*

$(H)$ : $X' = AX$ *(où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors :*

- $(i)$ *L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ des solutions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ de $(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.*
- $(ii)$ *Pour tout réel $t_0$ et tout vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution de $(H)$ qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$.*

**Vocabulaire**
On dit que le **problème de Cauchy vectoriel** $\begin{cases} X' = AX & \forall t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
possède une unique solution $X$ pour tout couple $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.

**Remarque**
Ce théorème est admis, mais nous en donnerons dans la section suivante une preuve dans le cas simple où la matrice $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

## 3) Pratique de la résolution des systèmes homogènes

Dans la suite, $(H)$ désigne le système différentiel $\boxed{X' = AX}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

### a) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$

Lorsque la matrice $A$ est diagonalisable, on sait résoudre $(H)$ :

**Proposition 11 (Solutions de $X' = AX$ avec $A$ diagonalisable).**

*On suppose que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $P \in GL_n(\mathbb{K})$*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*une matrice inversible telle que* $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*Alors, les solutions de $(H)$ sont les fonctions de la forme :*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \overrightarrow{C_1} + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \overrightarrow{C_n},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, et $\overrightarrow{C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_n}$ sont les colonnes de la matrice de passage $P$* .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Preuve** : Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ une fonction dérivable. On a

$$X' = AX \iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = PDP^{-1}X(t) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

On pose alors $Y(t) = P^{-1}X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P^{-1}X(t)) = P^{-1}X'(t),$$

(puisque la matrice $P$ ne dépend pas de $t$).
En notant $y_1, \cdots, y_n$ les composantes de $Y$, on obtient :

$$X' = AX \iff \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = DY(t) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}.$$

Ce dernier système est découplé, donc facile à résoudre :

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{cases}, \qquad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Les solutions de $(H)$ sont donc les fonctions $X$ de la forme

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Décomposons alors sur la base canonique de $\mathbb{K}^n$, notée $\overrightarrow{E_1}, \cdots \overrightarrow{E_n}$ : les solutions se réécrivent

$$X(t) = P\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\overrightarrow{E_1} + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\overrightarrow{E_n}\right) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} P\overrightarrow{E_1} + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} P\overrightarrow{E_n}.$$

Mais pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on a $P\overrightarrow{E_j} = \overrightarrow{C}_j$ (la $j^e$ colonne de la matrice $P$), donc

$$X(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\overrightarrow{C_1} + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\overrightarrow{C_n}.$$

$\square$

**Retour sur la preuve du théorème 10 dans le cas $A$ diagonalisable** :
Supposons $A$ diagonalisable. On vient de montrer que les solutions de $(H)$ : $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = Vect\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\overrightarrow{C_1}, \cdots, t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_n t}\overrightarrow{C_n}\right),$$

où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les valeurs propres complexes non nécessairement distinctes de $A$, et $(\overrightarrow{C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_n})$ sont les colonnes d'une matrice de passage $P$ qui diagonalise $A$.

(*i*) Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : c'est le sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ engendré par la famille de fonctions $(X_1, \cdots X_n)$ définie par $X_k : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}\overrightarrow{C_k}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
Montrons maintenant que la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ est libre :
si $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}^n)}$ (avec les $\alpha_k \in \mathbb{K}$), alors on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t}\overrightarrow{C_k} = 0_{\mathbb{R}},$$

donc en évaluant en $t = 0$, cela entraîne

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{C_k} = 0_{\mathbb{R}},$$

ce qui implique $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ puisque la famille des colonnes de $P$ est libre (c'est une matrice inversible).
Finalement, $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$, qui est donc de dimension $n$.

$(ii)$ Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Une solution de $(H)$ est de la forme

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} \overrightarrow{C_k},$$

avec $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, donc on a

$$X(t_0) = X_0 \iff \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t_0} \overrightarrow{C_k} = X_0 \iff P \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix} = X_0.$$

La matrice $P$ étant inversible, on a

$$X(t_0) = X_0 \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix} = P^{-1} X_0.$$

Puisque $\mathrm{e}^{\lambda_k t_0} \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$, ceci montre qu'un seul $n$-uplet $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ convient, d'où l'existence et l'unicité de la solution cherchée.$\square$

**Remarque**
La forme des solutions de $(H)$ n'est pas à connaître par cœur. Il faut, dans chaque exercice, reproduire le raisonnement utilisé dans la démonstration de la prop 11.

**Méthode**
Soit un système $X'(t) = AX(t)$ avec $A$ diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

- On diagonalise la matrice $A$, en déterminant $P$ inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale $D$.
- On effectue un changement de fonction inconnue en posant $X(t) = PY(t)$ ($Y$ est la nouvelle inconnue). On a alors $X'(t) = PY'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc

  $$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDP^{-1}PY(t) \iff PY'(t) = PDY(t) \iff Y'(t) = DY(t).$$

  **Il faut détailler cette équivalence à chaque fois**.
- On résout le système découplé $Y' = DY$ (qui est formé de $n$ équations différentielles de la forme $y' = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante).
- On détermine les solutions $X$ en calculant le produit $PY$.

**Remarque**
Pour résoudre un tel système, le calcul de $P^{-1}$ n'est donc pas nécessaire.

**Exemple**

Résoudre le système différentiel $(H)$ : $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 2y \\ y' = -x + 2y \end{array}\right.$ .

- **Réécriture matricielle** : Ce système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
- **Réduction de la matrice** $A$ : avec les techniques classiques de réduction (voir CH. 4), on obtient $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- **Résolution du système différentiel $(H)$.**
  On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = PY(t)$. On a alors :

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDP^{-1}PY(t) \iff PY'(t) = PDY(t) \iff Y'(t) = DY(t).$$

En notant $(u,v)$ les composantes de la fonction $Y$, on a

$$Y' = DY \iff \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{array} \right. \iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \alpha \mathrm{e}^t \\ v(t) = \beta \mathrm{e}^{4t} \end{array} \right. .$$

On retrouve alors $X$ en multipliant $Y$ par $P$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t \\ \beta \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t - 2\beta \mathrm{e}^{4t} \\ \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions du système sont

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \alpha \mathrm{e}^t - 2\beta \mathrm{e}^{4t} \\ y(t) & = & \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{4t} \end{array} \right. , \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut écrire ceci de manière algébrique :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = Vect_{\mathbb{R}} \left( t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} \right)$$

(on retrouve bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2).

### b) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

**Méthode**
Pour résoudre un système différentiel $(H)$ : $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ :

- On diagonalise la matrice $A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en choisissant :
  - des vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$ dans chaque sous-espace propre $E_\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
  - des vecteurs propres dans $\mathbb{C}^n$ deux à deux conjugués (qui correspondent aux couples $(E_\lambda, E_{\overline{\lambda}})$ si $\lambda \notin \mathbb{R}$).

  En effet, le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_n - A)$ est dans $\mathbb{R}[X]$, donc ses racines (les valeurs propres) non réelles sont deux à deux conjuguées.
- On détermine une base de solutions à valeurs complexes de $(H)$ avec la méthode expliquée précédemment.
- À partir de cette base de solutions, on déduit une base de solutions de $(H)$ **à valeurs réelles** en conservant les solutions à composantes réelles et en prenant les parties réelle et imaginaire des solutions à composantes non réelles.

**Exemple**

Soit le système différentiel $(H)$ : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ .

1. Montrer que la matrice $A$ du système est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, et la diagonaliser.
2. Déterminer les solutions à valeurs complexes de $(H)$.
3. En déduire les solutions à valeurs réelles de $(H)$.

1. Le système s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Avec les techniques de réduction du CH. 4, on montre que $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
   *Attention à bien choisir des vecteurs propres conjugués !*
   On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

2. **Solutions complexes de** $(H)$ : à l'aide de la technique présentée dans la partie précédente, on obtient les solutions complexes de $(H)$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \alpha \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \beta \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \\ y(t) & = & -\alpha \mathrm{i} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \beta i \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \end{array}\right. , \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Cet ensemble, noté $\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2}(H)$, est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2}(H) = Vect_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto X_1(t), t \mapsto X_2(t)\right),$$

avec

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \overline{X_1(t)}.$$

3. **Solutions réelles de** $(H)$ :
   L'espace des solutions complexes est engendré par la famille de fonctions $(X_1, \overline{X_1})$, donc aussi par la famille $(Re(X_1), Im(X_1))$ puisque

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2}(H) = Vect_{\mathbb{C}}(Re(X_1)+iIm(X_1), Re(X_1)-iIm(X_1)) = Vect_{\mathbb{C}}(Re(X_1), Im(X_1)).$$

On obtient donc une base de l'ensemble des solutions réelles :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2}(H) = Vect_{\mathbb{R}}(Re(X_1), Im(X_1)).$$

Puisque $X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ \sin(t) - i\cos(t) \end{pmatrix}$, on en déduit finalement que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2}(H) = Vect_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}\right).$$

et donc les solutions réelles du système $(H)$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = a\mathrm{e}^t \cos t + b\mathrm{e}^t \sin t \\ y(t) = a\mathrm{e}^t \sin t - b\mathrm{e}^t \cos t \end{cases}, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

### c) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable

**Méthode**

Lorsque la matrice $A$ n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$), on peut s'en sortir en trigonalisant $A$ (ce qui est toujours possible, au moins sur $\mathbb{C}$) et en appliquant le même changement de fonction inconnue que dans le cas diagonalisable $X(t) = PY(t)$. Aucune technique de trigonalisation n'étant au programme, il faudra se laisser guider par l'énoncé du problème.

**Exemple**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$.

1. Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable, et déterminer une famille $(u_1, u_2)$ de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
2. On complète la famille libre $(u_1, u_2)$ en posant $u_3 = (0, 0, 1)$.
   Trigonaliser $A$ à l'aide de la base $\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3)$.
3. Résoudre le système différentiel $(H)$ : $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = x + 2y \end{cases}$.

1. Les sous-espaces propres de $A$ sont

$$E_1 = Vect(1,0,1), \quad E_2 = Vect(0,1,1),$$

donc $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 1 + 1 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$, ce qui montre que $A$ n'est pas diagonalisable. La famille $(u_1; u_2) = ((1,0,1); (0,1,1))$ convient.

2. **Trigonalisation de $A$ :**
   Notons $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$ et écrivons sa matrice $T$ dans la base $\mathcal{B}$.
   On a $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = (-1, -1, 0) = -u_1 - u_2 + 2u_3$, donc
   $T = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **Résolution du système** $(H)$ **:**

Le système $(H)$ s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = PY(t)$. On a alors :

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PTP^{-1}PY(t) \iff PY'(t) = PTY(t) \iff Y'(t) = TY(t).$$

En notant $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on obtient le système : $\begin{cases} u'(t) = u(t) - w(t) \\ v'(t) = 2v(t) - w(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$.

Ce dernier système se résout assez facilement (en commençant par la dernière équation, et en traitant les deux autres avec la méthode de variation de la constante) :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t - \gamma \mathrm{e}^{2t} \\ (\beta - \gamma t)\mathrm{e}^{2t} \\ \gamma \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors les solutions du système en calculant $X(t) = PY(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \alpha \mathrm{e}^t - \gamma \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) & = & (\beta - \gamma t)\mathrm{e}^{2t} \\ z(t) & = & \alpha \mathrm{e}^t + (\beta - \gamma t)\mathrm{e}^{2t} \end{array} \right. , \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Algébriquement, ceci se réécrit

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = Vect_{\mathbb{R}} \left( t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ -te^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix} \right).$$

## 4) Comportement asymptotique des solutions dans le cas où $A$ est diagonalisable

**Théorème 12 (Comportement des solutions de $X' = AX$ quand $t \to +\infty$).**

*Soit le système différentiel* $\boxed{(H): \; X' = AX}$, *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est* **diagonalisable,** *de valeurs propres complexes* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *(pas nécessairement distinctes).*

*Les solutions de* $(H)$ *sont notées* $X(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ .

*(i)* *Si* $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \; Re(\lambda_k) < 0$, *alors pour tout* $j \in [\![1; n]\!]$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x_j(t) = 0$ *(pour n'importe quelle solution* $X$*).*

*On dit dans ce cas que le système est* **asymptotiquement stable**.

*(ii)* *Si* $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \; Re(\lambda_k) \leq 0$, *alors pour tout* $j \in [\![1; n]\!]$, *la composante* $x_j$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$ *(pour n'importe quelle solution* $X$*)* .

*On dit dans ce cas que le système est* **stable**.

*(iii)* *Si* $\exists k_0 \in \{1, \cdots, n\}, \; Re(\lambda_{k_0}) > 0$, *alors il existe au moins une solution* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ *telle que* $\exists j_0 \in \{1, \cdots, n\}, \; \lim\limits_{t \to +\infty} |x_{j_0}(t)| = +\infty$.

*On dit dans ce cas que le système est* **instable**.

**Preuve** : Puisque $A$ est diagonalisable, il existe une base $(\overrightarrow{C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_n})$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $A$. Les solutions de $(H)$ sont (d'après la prop. 11) les fonctions de la forme :

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} \overrightarrow{C_k}, \qquad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$, notons $C_{k,j}$ la $j^e$ composante du vecteur propre $\overrightarrow{C_k}$.
On a alors

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \qquad x_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} C_{k,j} \in \mathbb{K}.$$

(i) Supposons que $\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ Re(\lambda_k) < 0$. Alors, pour tout $t > 0$ et tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ :

$$|x_j(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||C_{k,j}||e^{\lambda_k t}| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||C_{k,j}|e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}.$$

Puisqu'on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on en déduit (par somme de limites) que $\lim\limits_{t\to+\infty} |x_j(t)| = 0$, quels que soient les scalaires $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$.

(ii) Si $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $Re(\lambda_k) \leq 0$, alors on a $e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} \leq 1$ pour tout $t > 0$ et tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, donc la majoration précédemment effectuée donne :

$$\forall t > 0,\ \forall j \in \{1, \cdots, n\}, \qquad |x_j(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, |C_{k,j}|,$$

ce qui montre que toutes les solutions ont leurs composantes bornées sur $\mathbb{R}^+$.

(iii) Si $\exists k_0 \in \{1, \cdots, n\}$, $Re(\lambda_{k_0}) > 0$, alors on considère la solution

$$X(t) = e^{\lambda_{k_0} t} \overrightarrow{C_{k_0}} = e^{\lambda_{k_0} t} \begin{pmatrix} C_{k_0,1} \\ \vdots \\ C_{k_0,n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{C_{k_0}}$ n'est pas nul (c'est un vecteur propre), donc au moins une des composantes $x_j$ de cette solution vérifie :

$$|x_j(t)| = \underbrace{|C_{k_0,j}|}_{>0} e^{\mathrm{Re}(\lambda_{k_0})t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$\square$

## 5) Cas d'un système avec second membre (HP)

Considérons maintenant un système différentiel linéaire à coefficients constants et **avec second membre** $\boxed{(E) : \ X' = AX + b(t)}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$. On note $\boxed{(H) : X' = AX}$ son système homogène associé. On admet le résultat suivant :

**Proposition 13 (Structure des solutions de $\boldsymbol{X' = AX + b(t)}$ (HP)).**

*(i)* *L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ des solutions de $(E)$ sur $I$ est non vide, et on a $\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + X_p$, pour toute solution $X_p : I \to \mathbb{K}^n$ de $(E)$.*

*(ii)* *Pour tout $t_0 \in I$ et tout vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution $X : I \to \mathbb{K}^n$ de $(E)$ telle que $X(t_0) = X_0$.*

Problème : comment trouver **une solution particulière de $\boldsymbol{(E)}$** ? On peut :

- soit **chercher une solution de $\boldsymbol{(E)}$ sous une forme simple** (un polynôme par exemple), indépendamment de la résolution de $(H)$ ;
- soit essayer d'appliquer la méthode de résolution de $(H)$ (diagonalisation ou trigonalisation de $A$) **directement sur $\boldsymbol{(E)}$**, pour tenter de découpler les équations.

Se référer aux exercices pour des exemples.

## 6) Lien entre équations et systèmes différentiels

**Proposition 14 (Equivalence entre équation et système différentiels).**
*On considère une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ homogène et à coefficients constants :* $\boxed{(H_1)\ :\ a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0}$*,* *où* $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$*,* $a_n \neq 0$*. Soit* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *une fonction $n$-fois dérivable.*
*Alors, $y$ est solution de $(H_1)$ si et seulement si la fonction vectorielle*

$X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ *définie par* $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ *est solution du système diff.*

$$(H_2) :\ \ X' = AX \ \ \textit{avec}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \ldots & \ldots & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

**Remarque (A RETENIR)**
En d'autres termes, on a une bijection entre les deux ensembles de solutions :

- les solutions de l'équation $(H_1)$ sont exactement les premières composantes des solutions vectorielles du système différentiel $(H_2)$.
- les solutions du système $(H_2)$ sont exactement les fonctions vectorielles de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$, où $y$ est une solution de l'équation $(H_1)$.

**Preuve** : Avec les notations de l'énoncé, la fonction $X$ est dérivable et :

$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

Montrons l'équivalence voulue :

- Si $y$ est solution de $(H_1)$, alors $y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n} y_0 - \frac{a_1}{a_n} y' - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}$, donc

$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} y' - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = AX,$$

où $A$ est la matrice donnée par l'énoncé.

- Réciproquement, si $X' = AX$, avec $A$ la matrice donnée par l'énoncé, alors

$$\begin{cases} y' = y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \\ y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n}y - \frac{a_1}{a_n}y' - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y^{(n-1)} \end{cases},$$

donc $a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

$\square$

On déduit de ce résultat une méthode de résolution pour les équations à coefficients constants :

**Méthode**
On considère une équation différentielle linéaire d'ordre $n$, homogène et à coefficients constants :

$$(H)\ :\ a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

où $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.

- On détermine le système différentiel équivalent à $(H)$.
  Pour cela, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ et on détermine $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
  $$y \text{ solution de } (H) \iff X'(t) = AX(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
- On résout le système $X' = AX$, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, où $P$ est une matrice de passage qui diagonalise (ou trigonalise) $A$.
- On ne conserve que la première composante de $X$, c'est la solution de $(H)$.
  *Astuce : dans le calcul de $X(t) = PY(t)$, il suffit de calculer le produit de la première ligne de $P$ par $Y(t)$ car seule la première composante de $X$ nous intéresse.*

**Exemple**

On considère l'équation différentielle $(H)$ : $y^{(3)}(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 0$.

1. Déterminer le système différentiel équivalent à $(H)$.
2. Le résoudre et en déduire les solutions de $(H)$.

1. **Système différentiel équivalent à** $(H)$ :

   On pose donc $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   L'équation $(H)$ est équivalente à $X'(t) = AX(t)$.

2. **Résolution** : On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose maintenant $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ tel que $X(t) = PY(t)$.

On a alors $X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDP^{-1}PY(t) \iff Y'(t) = DY(t) \iff \begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$.

Donc $Y(t) = \begin{pmatrix} K_1e^{-t} \\ K_2e^{t} \\ K_3e^{2t} \end{pmatrix}$.

Pour finir, il nous faut le premier élément de $X(t)$, c'est-à-dire le résultat obtenu en multipliant la première ligne de $P$ par la colonne $Y(t)$.

On obtient $y(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{t} + K_3e^{2t}$ avec $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$.

Finalement on a

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = Vect(t \mapsto e^{-t}; t \mapsto e^{t}; t \mapsto e^{2t}).$$

L'ensemble des solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

# IV Equations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère dans cette partie des équations différentielles linéaire d'ordre 2 :

$$\boxed{(E) : \ a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t),}$$

avec $a_0, a_1, a_2, d : I \to \mathbb{K}$ **continues** sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
L'équation homogène associée à $(E)$ sera notée :

$$\boxed{(H) : \ a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.}$$

**Remarque (Très importante)**

- **Si la fonction $\boldsymbol{a_2}$ ne s'annule pas sur $\boldsymbol{I}$**, l'équation $(E)$ peut se réécrire :

  $$(E) \iff y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

  avec $a(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}$, $b(t) = \frac{a_0(t)}{a_2(t)}$ et $c(t) = \frac{d(t)}{a_2(t)}$ ($a, b, c$ sont aussi continues sur $I$).
  On parle alors **d'équation « sous forme résolue »**. Pour ce genre d'équation, on dispose de résultats théoriques, que nous allons exposer ici.
- **Si la fonction $\boldsymbol{a_2}$ s'annule sur $\boldsymbol{I}$**, il faut commencer par résoudre l'équation $(E)$ sur les intervalles où $a_2$ ne s'annule pas puis tenter de « recoller » les solutions. Un exemple sera traité à la fin, afin de montrer que les résultats valables pour les équations sous forme résolue **ne sont plus vrais lorsque le coefficient $\boldsymbol{a_2}$ (devant $\boldsymbol{y''}$) s'annule** (ce problème avait déjà été mis en évidence pour les équations d'ordre 1).

## 1) Cas des coefficients constants (vu en TSI 1)

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$\boxed{(E): \ ay'' + by' + cy = d(t)},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ (constantes réelles ou complexes), $a \neq 0$, et $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
L'équation homogène associée est $\boxed{(H): \ ay'' + by' + cy = 0}$.

### a) Résolution de $(H)$ dans le cas complexe

**Proposition 15 (Solutions complexes de $(\boldsymbol{H})$).**
*Soit l'équation différentielle* $\boxed{(H): \ ay'' + by' + cy = 0}$ *où* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$.
*On considère l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$ $(*)$, *d'inconnue* $r \in \mathbb{C}$, *et de discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

- *Si* $\boxed{\Delta \neq 0}$, *alors, en notant* $r_1$ *et* $r_2$ *les deux solutions complexes distinctes de* $(*)$, *les solutions de* $(H)$ *(définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$*) sont les fonctions :*
$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \qquad (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$
- *Si* $\boxed{\Delta = 0}$, *alors, en notant* $r_0 = \frac{-b}{2a}$ *l'unique solution complexe de* $(*)$, *les solutions de* $(H)$ *(définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$*) sont les fonctions :*
$$y(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}, \qquad (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

**Preuve** : On se ramène à un système différentiel, comme expliqué dans la partie III. Les solutions de $(H)$ sont les premières composantes des solutions $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ du système différentiel linéaire

$$(\tilde{H}) : \quad X'(t) = MX(t), \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

On résout $(\tilde{H})$ en réduisant la matrice $M$, dont le polynôme caractéristique est

$$\chi_M(\lambda) = \frac{1}{a}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right).$$

Les valeurs propres de $M$ sont donc les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, alors $M$ possède deux valeurs propres complexes distinctes (non nécessairement conjuguées, attention !), notées $r_1, r_2$. La matrice $M$ est alors diagonalisable : il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} := D$.

  En notant $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}$ les colonnes de $P$, on obtient alors les solutions de $(\tilde{H})$ :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2}(\tilde{H}) = Vect_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto e^{r_1 t}\overrightarrow{C_1}, t \mapsto e^{r_2 t}\overrightarrow{C_2}\right).$$

  On en déduit (en prenant les premières composantes des solutions de $(\tilde{H})$) que les solutions de l'équation $(H)$ sont :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(H) = Vect_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right).$$

- Si $\Delta = 0$, alors $M$ possède une unique valeur propre double, notée $r_0 \in \mathbb{C}$.
  Si $M$ était diagonalisable, alors il existerait $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} P^{-1} = r_0 P I_2 P^{-1} = r_0 P P^{-1} = r_0 I_2,$$

ce qui est faux. Donc $M$ n'est pas diagonalisable, elle est seulement trigonalisable et donc semblable à $T = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ (voir chapitre de trigonalisation).
En notant $P \in GL_2(\mathbb{C})$ une matrice telle que $P^{-1}MP = T$, on peut donc déterminer les solutions de $(\tilde{H})$ : ce sont les fonctions de la forme $X(t) = PY(t)$, où $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution du système $Y' = TY$. Or,

$$Y' = TY \iff \left\{ \begin{array}{l} u' = r_0 u + v \\ v' = r_0 v \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} v(t) = \beta e^{r_0 t}, \quad \beta \in \mathbb{C} \\ u' = r_0 u + \beta e^{r_0 t} \end{array} \right. .$$

A $\beta$ fixé, les solutions de l'équation $u' = r_0 u + \beta e^{r_0 t}$ s'obtiennent avec la méthode de variation de la constante :

$$u(t) = (\beta t + \alpha) e^{r_0 t}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Donc :

$$Y' = TY \iff \left\{ \begin{array}{l} u(t) = (\alpha + \beta t)e^{r_0 t} \\ v(t) = \beta e^{r_0 t} \end{array} \right. , \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,$$

c'est-à-dire

$$Y' = TY \iff Y(t) = e^{r_0 t} \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

On en déduit :

$$X' = MX \iff X(t) = e^{r_0 t} P \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

En prenant la première composante de ce produit matriciel, on conclut que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(H) = Vect_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto te^{r_0 t}\right).$$

$\square$

### b) Résolution de $(H)$ dans le cas réel

Si l'équation de départ est à coefficients réels, on peut trouver les solutions **à valeurs réelles** de $(H)$ à partir de celles à valeurs complexes.

**Proposition 16 (Solutions réelles de $(H)$).**
*Soit l'équation différentielle* $\boxed{(H) : \ ay'' + by' + cy = 0}$ *où* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.
*On considère l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$ $(*)$, *d'inconnue* $r \in \mathbb{C}$, *et de discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

- *Si* $\boxed{\Delta > 0}$, *alors, en notant* $r_1$ *et* $r_2$ *les deux solutions réelles distinctes de* $(*)$, *les solutions de* $(H)$ **à valeurs réelles** *sont les fonctions :*
$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
- *Si* $\boxed{\Delta = 0}$, *alors, en notant* $r_0 = \frac{-b}{2a}$ *l'unique solution réelle de* $(*)$, *les solutions de* $(H)$ **à valeurs réelles** *sont les fonctions :*
$$y(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
- *Si* $\boxed{\Delta < 0}$, *alors, en notant* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$ *les deux solutions complexes conjuguées de* $(*)$, *les solutions de* $(H)$ **à valeurs réelles** *sont les fonctions :*
$$y(t) = e^{\alpha t} \left(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)\right), \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

**Preuve** : Bien entendu, les deux premiers cas ont déjà été traités dans la preuve

précédente (on diagonalise/trigonalise sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).
Il reste donc le cas où $\Delta < 0$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ a dans ce cas deux valeurs propres complexes non réelles et conjuguées (car son polynôme caractéristique $\chi_M(\lambda) = \frac{1}{a}(a\lambda^2 + b\lambda + c)$ est à coefficients réels) :

$$\lambda = \alpha + i\beta, \qquad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta.$$

Cette matrice est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et on peut construire une base de $\mathbb{C}^2$ composée de vecteurs propres de $M$ de la forme $(U, \overline{U})$.
Les solutions à valeurs complexes du système différentiel $(\tilde{H})$ : $X' = MX$ sont donc :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2}(\tilde{H}) = Vect_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}\, U,\ t \mapsto e^{(\alpha-i\beta)t}\, \overline{U}\right).$$

En notant $U = U_1 + iU_2$ avec $U_1$ et $U_2 \in \mathbb{R}^2$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$e^{(\alpha+i\beta)t}\, U = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)U_1 - \sin(\beta t)U_2\right) + ie^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)U_1 + \cos(\beta t)U_2\right).$$

On en déduit les solutions de $(\tilde{H})$ à valeurs réelles :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2}(\tilde{H}) = Vect_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)U_1 - \sin(\beta t)U_2\right),\ t \mapsto e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)U_1 + \cos(\beta t)U_2\right)\right).$$

En sélectionnant la première composante de ces solutions, on obtient les solutions de $(H)$ à valeurs réelles :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = Vect_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right).$$

$\square$

### c) Résolution de l'équation complète $(E)$

On considère maintenant $\boxed{(E):\ ay'' + by' + cy = d(t),}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$.

- Si le second membre $t \mapsto d(t)$ est une fonction continue quelconque $I \to \mathbb{K}$, alors la résolution de $(E)$ peut être difficile, voire impossible.
- Si le second membre a la forme particulière suivante : $\boxed{d(t) = P(t)e^{mt}}$, avec $P$ un polynôme à coefficients réels ou complexes, et $m \in \mathbb{C}$, alors on peut trouver une solution particulière de $(E)$ et donc résoudre complètement $(E)$.

**Proposition 17 (Second membre de la forme "polynôme-exponentielle").**
*Soit l'équation différentielle* $\boxed{(E):\ ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}}$,
*où* $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $P \in \mathbb{K}[t]$ *(une fonction polynomiale) et* $m \in \mathbb{C}$.
*Alors,* $(E)$ *possède une solution de la forme* $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$,
*où* $Q$ *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *tel que* $\deg(Q) \geq \deg(P)$.

**Exemple**
L'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = (t^2 + t - \sqrt{3})e^{4t}$ possède au moins une solution de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{4t}$, où $Q$ est un polynôme à coefficients réels.

**Preuve** : Notons $d = \deg(P) \in \mathbb{N}$. Considérons une fonction $y : t \mapsto Q(t)e^{mt}$, où $Q$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cette fonction $y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \left((am^2 + bm + c)Q(t) + (2am + b)Q'(t) + aQ''(t)\right) e^{mt},$$

donc $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si

$$(am^2 + bm + c)Q + (2am + b)Q' + aQ'' = P.$$

Montrons alors qu'il existe toujours un polynôme $P$ vérifiant cette relation, en étudiant l'application linéaire $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par

$$\varphi(Q) = (am^2 + bm + c)Q + (2am + b)Q' + aQ''.$$

On a

$$\varphi(1) = (am^2 + bm + c), \quad \varphi(X) = (am^2 + bm + c)X + (2am + b),$$
$$\forall k \geq 2, \qquad \varphi(X^k) = (am^2 + bm + c)X^k + k(2am + b)X^{k-1} + ak(k-1)X^{k-2}.$$

On remarque alors que le degré des images $\varphi(X^k)$ dépend de la nullité des coefficients $am^2 + bm + c$ et $2am + b$.

- Si $am^2 + bm + c \neq 0$, alors $\varphi$ conserve le degré, donc la famille $(\varphi(1), \varphi(X), \cdots, \varphi(X^d))$ est libre (car de degrés échelonnés $0, 1, \cdots, d$), elle forme donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Ainsi, la restriction $\varphi_1 : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ est un isomorphisme (puisqu'elle envoie une base sur une base). Le polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ admet donc un antécédent $Q$ de degré $d$ par $\varphi$.

- Si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$, alors $\varphi$ abaisse le degré d'un cran, donc
$$\varphi(1) = 0, \qquad \forall k \geq 1,\ \deg(\varphi(X^k)) = k - 1.$$
La famille $(\varphi(X), \cdots, \varphi(X^d), \varphi(X^{d+1}))$ est une famille libre (car de degrés échelonnés $0, 1, \cdots, d$), elle forme donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$).
La restriction $\varphi_2 : Vect(X, X^2, \cdots, X^{d+1}) \to \mathbb{R}_d[X]$ est donc un isomorphisme. Le polynôme $P$ admet donc un antécédent $Q$ de degré $d+1$ par $\varphi$.
- Si $am^2 + bm + c = 2am + b = 0$, alors
$$\varphi(1) = \varphi(X) = 0, \qquad \forall k \geq 2,\ \deg(\varphi(X^k)) = k - 2,$$
donc on obtient de même que la restriction $\varphi_3 : Vect(X^2, \cdots, X^{d+2}) \to \mathbb{R}_d[X]$ est un isomorphisme, ce qui prouve que $P$ admet un antécédent $Q$ de degré $d+2$ par $\varphi$.

Dans chaque cas, il existe donc bien un polynôme $Q$ tel que $P = \varphi(Q)$. $\square$

**Remarque**

La preuve montre qu'en fait, il existe une solution de $(E)$ de la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$ avec

- $\deg(Q) = \deg(P)$ lorsque $m$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ lorsque $m$ est racine simple de l'équation caractéristique.
- $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ lorsque $m$ est racine double de l'équation caractéristique.

**Exemple**

1. Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation $(E_1)$ : $y'' + y = e^{it}$.
2. En déduire les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation $(E_2)$ : $y'' + y = \cos(t)$.

1. Notons $(H) : y'' + y = 0$ l'équation homogène associée à $(E_1)$. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$, dont les solutions sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. Les solutions de $(H)$ sont donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(H) = \left\{t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it},\ (A, B) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Cherchons ensuite une solution particulière de $(E_1)$ sous la forme $y(t) = Q(t)e^{it}$. On a

$$y''(t) + y(t) = (Q''(t) + 2iQ'(t) - Q(t) + Q(t))e^{it} = (Q''(t) + 2iQ'(t))e^{it},$$

donc une telle fonction $y$ est solution de $(E_1)$ ssi $Q'' + 2iQ' = 1$.
$Q$ est nécessairement de degré 1 : $Q(X) = aX + b$, avec $2ia = 1$, soit $a = -\frac{i}{2}$ (et $b$ quelconque). Donc la fonction $y_p : t \mapsto -\frac{it}{2}e^{it}$ est une solution de $(E_1)$, ce qui permet de déterminer toutes les solutions de $(E_1)$ :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(E_1) = \left\{t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it} - \frac{it}{2}e^{it},\ (A, B) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

2. Déterminons d'abord les solutions à valeurs réelles de l'équation homogène $(H)$ : $y'' + y = 0$. Puisque

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(H) = Vect_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto e^{it},\ t \mapsto e^{-it}\right),$$

on en déduit que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = Vect_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto \cos(t),\ t \mapsto \sin(t)\right).$$

Déterminons ensuite une solution particulière de $(E_2)$ : $y'' + y = \cos(t)$.
Pour cela, on utilise que $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$ et on connaît une solution (à valeurs complexes) de $z'' + z = e^{it}$, la fonction $z : t \mapsto -\frac{it}{2}e^{it}$. Sa partie réelle $y = \mathrm{Re}(z)$ vérifie :

$$y'' + y = \mathrm{Re}(z'' + z) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \cos(t).$$

Ainsi, la fonction $y \mapsto \mathrm{Re}\left(-\frac{it}{2}e^{it}\right) = \frac{t}{2}\sin(t)$ est une solution de $(E_2)$, et on conclut :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E_2) = \left\{t \mapsto A\cos t + B\sin t + \frac{t}{2}\sin t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

**Remarque**
On aurait pu aussi procéder de la façon suivante :

- on décompose le second membre de $(E_2)$ : $\cos(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$ ;
- on détermine une solution particulière des équations
  $y'' + y = \frac{1}{2}e^{it}$ et $y'' + y = \frac{1}{2}e^{-it}$ (comme on l'a fait pour $(E_1)$) ;
- on en déduit par le "principe de superposition" une solution particulière de $(E_2)$.

mais c'est long...

## 2) Cas général sous "forme résolue" : structure de l'ensemble des solutions

On va maintenant travailler avec des équations **à coefficients non constants**, mises **sous forme résolue**.

**Notation**

Dans cette partie, on note $\boxed{(E):\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)}$ et $\boxed{(H):\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0}$ l'équation homogène associée. Les fonctions $a$, $b$ et $c$ appartiennent à $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point).

**Théorème 18 (Structure algébrique de l'ensemble des solutions).**

*(i)* *L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ des solutions de $(H)$ sur $I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2* .

*(ii)* *L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ des solutions de $(E)$ sur $I$ est non vide, et on a $\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p$, où $y_p$ est n'importe quelle solution de $(E)$ sur $I$* .

**Méthode**
Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **sous forme résolue**, il suffit donc :

- de trouver **deux solutions linéairement indépendantes** de $(H)$ (c'est-à-dire deux fonctions nulles et non proportionnelles qui vérifient $(H)$) : elles forment une base de $\mathcal{S}_I(H)$ ;
- de trouver une solution particulière de $(E)$.

Hélas, en pratique **ça n'est pas toujours aussi simple !**
Le problème est que l'on ne dispose pas de formule directe pour les solutions de $(H)$ (à la différence du cas où les coefficients sont constants). **Il faut donc développer des techniques de recherche de solutions de $(\boldsymbol{H})$ et de $(\boldsymbol{E})$**.

**Exemple**
Résolution de l'équation $(E)$ : $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2$ sur $I = ]0, +\infty[$.
Sur l'intervalle $I$, l'équation $(E)$ peut se mettre sous forme résolue (en divisant par $t^2$, **car $\boldsymbol{t \mapsto t^2}$ ne s'annule pas sur $\boldsymbol{I}$**) :

$$(E) \iff y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = \frac{2}{t^2}$$

donc le théorème précédent s'applique. Pour la résolution :

- on remarque que l'équation homogène $(H)$ : $t^2y'' - 2ty' + 2y = 0$ admet des solutions polynomiales indépendantes : $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$. D'où $\mathcal{S}_I(H) = Vect_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto t, t \mapsto t^2\right)$.

- on trouve facilement une solution de $(E)$ constante sur $I$ : $y \equiv 1$.

Les solutions de $(E)$ sur $I$ sont donc les fonctions

$$y(t) = \lambda t^2 + \mu t + 1, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**ATTENTION !**

Il ne faut pas oublier de **vérifier que le coefficient devant $\boldsymbol{y''}$** dans l'équation $(E)$ **ne s'annule pas sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$** pour pouvoir appliquer le théorème de structure algébrique.

Il n'est toutefois pas indispensable de faire les calculs sur la forme résolue de l'équation différentielle si celle-ci est plus compliquée que la forme de départ.

Comme pour les équations linéaires d'ordre 1, on dispose aussi d'un résultat d'unicité si on se donne des conditions initiales :

**Théorème 19 (Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 2).**
*Pour tout $t_0 \in I$ et tout $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution*
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
*$y$ de $(E)$ sur $I$ qui vérifie les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$.*
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**ATTENTION !**
Les conditions initiales sur $y$ et $y'$ ne peuvent s'imposer **qu'au même point $t_0$**. Cela correspond à une condition initiale **vectorielle** sur $Y(t) = (y(t), y'(t))$. On parle de "problème de Cauchy du second ordre".

**Exemple**
Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) : \ t^2y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = 2 \quad \forall t > 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$.

Les solutions de $(E)$ sur $I = ]0; +\infty[$ (intervalle sur lequel l'équation peut se mettre sous forme résolue) sont les $y : t \mapsto \lambda t^2 + \mu t + 1$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (voir l'exemple précédent)
Si on impose les conditions initiales $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$, alors on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 1 = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases},$$

c'est-à-dire $(\lambda; \mu) = (2; -3)$.
Il y a donc une unique solution de $(E)$ qui vérifie la condition initiale donnée : la fonction

$$y : t \mapsto 2t^2 - 3t + 1.$$

**ATTENTION !**

Dans l'exemple précédent, **on n'aurait pas pu imposer de conditions initiales en $\boldsymbol{t_0 = 0}$**, puisque ce point n'appartient pas à un intervalle $I$ sur lequel on peut mettre l'équation $(E)$ sous forme résolue :

$$(E) \iff y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = \frac{2}{t^2}.$$

D'ailleurs, on le voit bien en examinant les solutions : les fonctions $t \mapsto \lambda t^2 + \mu t + 1$ sont solutions de l'équation $(E)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier mais on a nécessairement $y(0) = 1$ pour toutes valeurs de $\lambda$ et $\mu$.

## 3) Cas général : techniques de résolution

**Notation**

On revient au cas général :

$$\boxed{(E): \ a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t),}$$

où $a_2, a_1, a_0, d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On note $\boxed{(H): \ a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0}$ l'équation homogène associée à $(E)$. Dans cette partie, on va donner des techniques de recherche de solutions de $(E)$ ou de $(H)$.

### a) Méthode d'abaissement d'ordre

**Si on connaît une solution de $(H)$, notée $h(t)$, qui ne s'annule pas sur $I$**, alors on peut chercher les solutions de $(E)$ sous la forme :

$$y(t) = h(t)f(t), \text{ avec } f \text{ deux fois dérivable sur } I.$$

En effet, étant donnée une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable, on peut poser $f(t) = \frac{y(t)}{h(t)}$ pour tout $t \in I$. La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $I$ et :

$$y(t) = h(t)f(t),$$

$$y'(t) = h'(t)f(t) + h(t)f'(t),$$

$$y''(t) = h''(t)f(t) + 2h'(t)f'(t) + h(t)f''(t),$$

et donc

$$\begin{aligned} a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) &= a_2(t)h(t)\, f''(t) + (a_1(t)h(t) + 2a_2(t)h'(t))\, f'(t) \\ &\quad + \underbrace{\Big(a_2(t)h''(t) + a_1(t)h'(t) + a_0(t)h(t)\Big)}_{=0 \text{ car } h\in\mathcal{S}_I(H)} f(t). \end{aligned}$$

Donc

$$y \text{ est solution de } (E) \iff f' \text{ est solution de } (F) : \; \tilde{a}(t)z' + \tilde{b}(t)z = d(t),$$

avec $\tilde{a} = a_2 h$ et $\tilde{b} = a_1 h + 2a_2 h'$. On obtient donc une équation différentielle linéaire du premier ordre (que l'on sait en général résoudre).

**Méthode (Mise en pratique de la méthode d'abaissement d'ordre)**
Si on connaît $h \in \mathcal{S}_I(H)$ telle que $\forall t \in I,\ h(t) \neq 0$ :

- on cherche les solutions de $(E)$ sous la forme $y(t) = h(t)f(t)$. En injectant cette forme dans $(E)$, on obtient une équation différentielle en $f'$ et $f''$ uniquement ;
- on détermine $f' = \left(\frac{y}{h}\right)'$ en résolvant une équation du premier ordre ;
- en primitivant, on obtient $f = \frac{y}{h}$ ;
- en remultipliant par $h$ (qu'on connaît), on obtient enfin $y$.

**Remarque**

- C'est le même principe que la méthode de variation de la constante, vue pour les équations du premier ordre.
- Évidemment, ne pas retenir les coefficients de la nouvelle équation, mais seulement la mise en pratique de la méthode.

**Exemple**
Résolution sur $I = ]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E) :\ t^2y'' - 2y = 3t^2$.

- La fonction $h : t \mapsto t^2$ est solution de l'équation homogène $(H) : t^2y'' - 2y = 0$ sur

$\mathbb{R}$.
Vu que $h$ ne s'annule pas sur $I = ]0, +\infty[$, on peut chercher les solutions de $(E)$ sous la forme

$$y(t) = t^2 f(t),$$

en posant $f(t) = \frac{y(t)}{t^2}$ pour tout $t > 0$.

- Pour toute fonction $y : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on a donc

$$(E): \quad t^2y''-2y = 3t^2 \iff f''+\frac{4}{t}f' = \frac{3}{t^2} \iff f' \text{ est solution de } (\tilde{E}): \quad z'+\frac{4}{t}z = \frac{3}{t^2}.$$

- L'équation $(\tilde{E})$ se résout facilement avec la méthode de variation de la constante (équation linéaire du premier ordre sous forme résolue) : les solutions sur $I$ sont

$$z(t) = \frac{\alpha}{t^4} + \frac{1}{t}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- On en déduit que

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \iff f'(t) = \frac{\alpha}{t^4} + \frac{1}{t} \iff f(t) = -\frac{\alpha}{3t^3} + \beta + \ln(t),$$

c'est-à-dire

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \iff y(t) = \frac{-\alpha}{3t} + \beta t^2 + t^2\ln(t).$$

Finalement, les solutions de $(E)$ sur $I = ]0; +\infty[$ sont les fonctions :

$$y(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + t^2 \ln(t), \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On retrouve bien la structure algébrique annoncée par le théorème 18 :

$$\mathcal{S}_I(E) = \underbrace{Vect\left(t \mapsto \frac{1}{t},\ t \mapsto t^2\right)}_{\text{plan vectoriel } \mathcal{S}_I(H)} + \underbrace{(t \mapsto t^2 \ln(t))}_{\text{solution particulière}}$$

(normal, on a une équation différentielle linéaire d'ordre 2 qui peut se mettre sous forme résolue).

### b) Utilisation de séries entières

On peut également chercher si l'équation différentielle étudiée admet des solutions **développables en série entière** (cela englobe notamment les polynômes, les exponentielles, etc.).

**Méthode (Recherche de solutions développables en séries entières)**
On procède par "analyse-synthèse" :

- étant donnée une fonction développable en série entière $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$ dans un intervalle $]-R; R[$, on détermine une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)$ pour que $y$ soit solution de $(E)$ : $a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t)$.
  On obtient en général une relation de récurrence sur la suite $(\alpha_n)$ ;
- on essaie d'expliciter le terme général de la suite $(\alpha_n)$ en fonction de $n$, à partir de la relation de récurrence précedemment obtenue.
  Cette étape donne les **éventuelles** solutions DSE ;
- on vérifie ensuite que la ou les séries entières obtenues ont bien un rayon de convergence $R$ non nul, et donc qu'elles définissent bien des fonctions.
  Cette étape montre **l'existence** de solutions DSE sur $]-R; R[$ ;
- si possible, on essaie de "reconnaître" les solutions obtenues à partir de leur DSE, c'est-à-dire de les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On renvoie aux exercices des TD 10 et 11 pour des exemples.

**Remarque**
Cette technique fonctionne bien lorsque les coefficients $t \mapsto a_2(t)$, $t \mapsto a_1(t)$, $t \mapsto a_0(t)$ de l'équation différentielle $(E)$ sont des polynômes en $t$, et lorsque le second membre $d(t)$ est lui-même développable en série entière.

### c) Changement de variable

**Méthode (Mise en pratique du changement de variable)**
Soit $(E)$ une équation différentielle d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$, dont la variable est notée $t$. On pose $t = \psi(x)$, $x$ est la « nouvelle variable », et $z = y \circ \psi$ est la « nouvelle fonction inconnue » :

$$y(t) = y(\psi(x)) = z(x).$$

On calcule alors les dérivées de $z$ en fonction de celles de $y$, et on montre que $(E)$ est équivalente à une équation différentielle d'inconnue $z$ (en général plus simple), sur un intervalle à préciser.
Attention, parfois le changement de variable est donné « dans l'autre sens », c'est-à-dire on pose $x = \theta(t)$ !

**Exemple**
Résolution sur $I = ]-1;1[$ de l'équation différentielle $(H):\ (1-t^2)y'' - ty' + y = 0$ en utilisant le changement de variable $t = \cos x$.

Pour $y : ]-1;1[ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, posons $z = y \circ \cos$, qui est deux fois dérivable sur $]0;\pi[$ (et on a $y = z \circ \arccos$).
On a $z(x) = y(\cos x)$ et $z''(x) = -(\cos x) \times y'(\cos x) + (\sin^2 x) \times y''(\cos x)$, donc

$y$ solution de $(H) \iff z''(x) + z(x) = 0 \iff z(x) = A\cos x + B\sin x, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions de $(H)$ sur $]-1;1[$ sont donc

$$y(t) = At + B\sin(\arccos(t)) = At + B\sqrt{1-t^2}, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

## 4) Le cas des formes "non résolues"

**Méthode**

On considère $\boxed{(E) : \ a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = d(t)}$.

**Si $t \mapsto a_2(t)$ s'annule en un point $\alpha \in I$** (et pas ailleurs) :

- On résout d'abord sur les intervalles $]-\infty, \alpha[\cap I$ et $]\alpha, +\infty[\cap I$ (où le théorème 18 s'applique, car $t \mapsto a_2(t)$ ne s'annule pas sur ces intervalles, donc $(E)$ peut s'écrire sous forme résolue).
- Ensuite, on voit si on peut "raccorder" les solutions obtenues, pour obtenir des solutions sur tout $I$.

**ATTENTION !**

Il faut vérifier pour cela que les éventuels raccords sont **autant de fois dérivables en $\alpha$ que l'équation l'exige** (donc deux fois dérivables pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2). La simple continuité en suffit pas !

**Exemple**

Résolution **sur R** de l'équation différentielle $(E) : \ t^2y'' - 2y = 3t^2$.

On a déjà résolu cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la méthode d'abaissement d'ordre (voir p.71).

Si $y$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)$, alors, puisqu'on connaît déjà les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$

(pour $\mathbb{R}_-^*$, la résolution est la même), elle est nécessairement de la forme :

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + t^2 \ln |t| & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\gamma}{t} + \delta t^2 + t^2 \ln |t| & \text{si } t < 0 \end{cases}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Pour que cette fonction soit une solution sur $\mathbb{R}$, il faut vérifier qu'elle est continue et deux fois dérivable en 0.

Afin que $y$ soit continue en 0, il faut $\alpha = \gamma = 0$ (sinon, il y a une limite infinie en 0).

En outre :

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{y(t) - y(0)}{t} = \begin{cases} \beta t + t \ln |t| & \text{si } t > 0 \\ \delta t + t \ln |t| & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

donc $y'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - y(0)}{t} = 0$.

On a donc :

$$y'(t) = \begin{cases} 2\beta t + 2t \ln(t) + t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 2\delta t + 2t \ln(-t) + t & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Enfin,

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{y'(t) - y'(0)}{t} = \begin{cases} 2\beta + 2 \ln |t| + 1 & \text{si } t > 0 \\ 2\delta + 2 \ln |t| + 1 & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y'(t) - y'(0)}{t}$ est infinie, ce qui contredit l'existence de $y''(0)$.

En conclusion, l'équation $(E)$ **ne possède aucune solution sur** $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \emptyset$.

Voilà donc un exemple où les théorèmes 18 et 19 ne s'appliquent pas !