Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 9
Courbes paramétrées

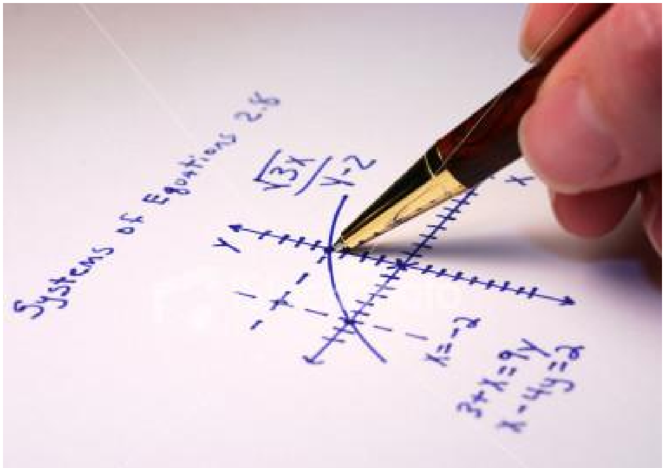


Table des matières

Notation
Dans tout le chapitre, on munit le plan affine $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ et l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.
On pourra ainsi identifier un point M de $\mathcal{P}$ (resp. de $\mathcal{E}$) avec un élément $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$). Ainsi, la notation $M = (x; y)$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
De même, un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$) s'identifie lui aussi avec un élément $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$) et la notation $\overrightarrow{u} = (x; y)$ signifie $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

I Exemples introductifs

Dans le cours de géométrie de TSI 1, nous avons déjà rencontré des exemples simples de "courbes" : les droites et les cercles. Ces courbes simples peuvent se décrire de deux manières :

- soit à l'aide d'une **représentation paramétrique** (appelée aussi **système d'équations paramétriques**) : les points de la courbe sont ceux qui s'écrivent sous la forme $M = (x(t); y(t))$, où t est un paramètre réel décrivant un certain intervalle.
- soit à l'aide d'un **système d'équations cartésiennes** : les points de la courbe sont les $M = (x; y)$ qui vérifient des relations liant les variables x et y.

Exemple (Droite du plan)
Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathcal{P}$ passant par $A = (x_0; y_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (a; b) \neq \overrightarrow{0}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Exemple (Cercle du plan)
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de $\mathcal{P}$ de centre $\Omega = (a; b)$ et de rayon $R > 0$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

Exemple (Droite de l'espace)
Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathcal{E}$ passant par $A = (x_0; y_0; z_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (a; b; c) \neq \overrightarrow{0}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

ATTENTION !
Rappelons qu'une droite de l'espace admet **un système de deux équations cartésiennes** !

Remarque

Dans ces trois exemples, les équations paramétriques sont de la forme $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right.$, ou $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right.$, donc à chaque fois, il n'y a **qu'un seul paramètre réel "t"**.

Mais tous les ensembles géométriques ne peuvent pas se décrire à l'aide d'un seul paramètre réel.

Exemple (Plan de l'espace)
Soit $\mathcal{Q}$ le plan de $\mathcal{E}$ passant par $A = (x_0; y_0; z_0)$ et dirigé par $\overrightarrow{u} = (a; b; c) \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = (a', b', c') \neq \overrightarrow{0}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{Q}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$.

Remarque
Cette fois-ci la représentation paramétrique comporte **deux paramètres réels** t_1, t_2. C'est normal, puisqu'un plan n'est pas une "courbe", c'est une "surface".

On va ici s'intéresser à des "courbes" paramétrées, c'est-à-dire à des ensembles de points du plan ou de l'espace pouvant se décrire à l'aide d'une représentation paramétrique **à un seul paramètre réel** t.

II Généralités sur les courbes paramétrées

Définition 1 (Courbe paramétrée).
*Une **courbe paramétrée** (ou un **arc paramétré**) Γ du plan (resp. de l'espace)*
. . . .
est la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^2$
. . . .
(resp. $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^3$).
. . . .

*Pour tout $t \in I$, on appelle **point de paramètre t** le point $M(t)$ tel que*
. . . .
$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$. En notant (x, y) les composantes de $\overrightarrow{f}$, on a donc
. . . .

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}, \text{ et on notera aussi } M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

. . . .
(idem dans l'espace, avec trois coordonnées).
. . . .

Vocabulaire

- La fonction $\overrightarrow{f} : t \mapsto (x(t), y(t))$ s'appelle un **paramétrage** de la courbe. On parle aussi de **représentation paramétrique** ou **d'équations paramétriques**.
- Le point $M(t)$ est aussi appelé **point courant** de la courbe Γ.

Remarque (Représentation graphique d'une fonction vectorielle)
Les fonctions réelles d'une variable réelle pouvaient être représentées dans le plan en traçant l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

Pour les fonctions vectorielles, le mode de représentation est différent. On trace l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ (respectivement $(x(t), y(t), z(t))$) où $t \in I$. Le paramètre t n'apparaît pas de façon visible sur la représentation graphique.

La figure 1 donne un exemple de représentation d'une fonction vectorielle.

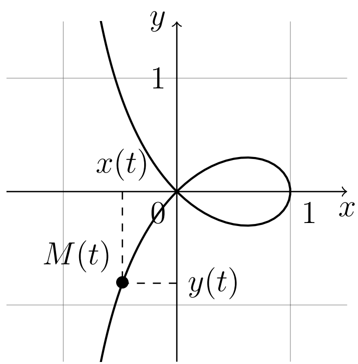


FIGURE 1 – Strophoïde : représentation de la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}\right)$.

Définition 2 (Point régulier, point singulier).
Soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$ tel que $\overrightarrow{f}$ est dérivable en t_0.
....

(i) *Le point de paramètre t_0 de Γ est dit* ***régulier*** *lorsque $\overrightarrow{f}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$* .
....
Si tous les points de Γ sont réguliers on dit que la ***courbe est régulière*** .
....

(ii) *Le point de paramètre t_0 de Γ est dit* ***singulier*** *ou* ***stationnaire*** *lorsque*
....
$\overrightarrow{f}'(t_0) = \overrightarrow{0}$.
....

Méthode
Pour trouver les points singuliers ou stationnaires d'une courbe il faut déterminer les valeurs de t pour lesquelles $\overrightarrow{f}'(t) = \overrightarrow{0}$. Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = 0 \end{cases}$.

Exemple (Points singuliers de l'astroïde)
On considère la courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$.

Déterminer les points singuliers de cette courbe.

Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \end{array}\right.$.

Donc, pour déterminer le ou les points singuliers, il nous faut résoudre :

$$-3\sin(t)\cos^2(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) = 0 \iff \sin(t) = 0 \text{ ou } \cos(t) = 0.$$

Les points singuliers sont donc les points de paramètre $k\pi$ ou $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme les fonctions x et y sont 2π-périodiques cela correspond à seulement 4 points du plan : $M(0) = (1, 0)$, $M(\pi/2) = (0, 1)$, $M(\pi) = (-1, 0)$ et $M(3\pi/2) = (0, -1)$.

III Tangente en un point

On considère une courbe paramétrée $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ et $t_0 \in I$.

Définition 3 (Tangente à une courbe paramétrée).

(*i*) *Si le vecteur* $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$ *admet une limite* $\overrightarrow{u}$ *lorsque* $t \to t_0^-$ *(resp.* $\overrightarrow{v}$ *lorsque* $t \to t_0^+$*), on appelle* **demi-tangente à gauche** *(resp. à droite) en* t_0 *la demi-droite issue de* $M(t_0)$ *et dirigée par* $\overrightarrow{u}$ *(resp. par* $\overrightarrow{v}$*)* .

(*ii*) *Si les demi-tangentes à gauche et à droite en* t_0 *existent et si* $\overrightarrow{u} = \pm\overrightarrow{v}$ *(avec les notations précédentes), alors on appelle* **tangente en** t_0 *la droite passant par* $M(t_0)$ *et dirigée par* $\overrightarrow{u}$.

Remarque

- La **tangente** à Γ au point de paramètre t_0 est donc la limite des directions des sécantes à la courbe passant par $M(t_0)$ (c'est-à-dire les droites $(M(t_0)M(t))$).
- La limite des directions des sécantes peut être différente à gauche et à droite. On définit dans ce cas des **demi-tangentes** qui sont des demi-droites.

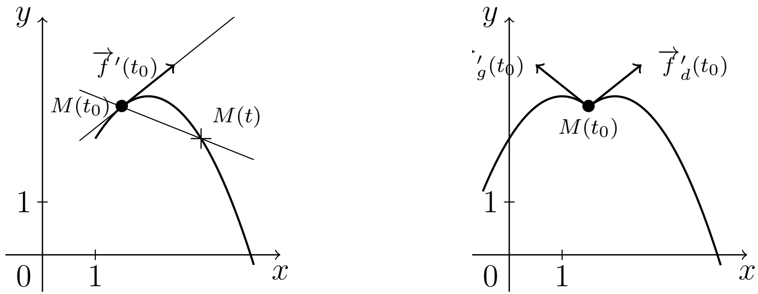


FIGURE 2 – Tangentes et demi-tangentes.

Proposition 4 (Tangente en un point régulier).

Si t_0 est un point régulier de Γ, alors Γ possède une tangente en t_0.

C'est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$.

Preuve : Voir preuve de la proposition 5. □

Exemple (Tangente à l'astroïde en $t = \pi/4$)
On reprend, une nouvelle fois, la courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$.
Déterminer une équation cartésienne de la tangente au point de paramètre $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

On a vu que $\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}$, donc $\begin{cases} x'(\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y'(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$.
Le point de paramètre $\pi/4$ est donc régulier et la tangente à la courbe en ce point est dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{f}(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(-1;1)$.

Ainsi, une équation cartésienne de la tangente au point $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ est :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} = 0 \iff x - \frac{\sqrt{2}}{4} + y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \iff y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Proposition 5 (Tangente en un point singulier).
Soit t_0 un point singulier de Γ. On suppose qu'il existe un plus petit entier $p \geq 2$
. . . .
tel que $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Alors, Γ possède une tangente en t_0.
. . . .
C'est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)$.
. . . .

Preuve : [Propositions 4 et 5] Par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \overrightarrow{OM(t)} - \overrightarrow{OM(t_0)} = \overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0).$$

On utilise alors la formule de Taylor-Young à l'ordre p (cela suppose bien sûr que $\overrightarrow{f}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^p$) :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0).$$

□

Remarque

- Dans tous les cas (point régulier ou singulier), la tangente à la courbe en t_0 est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul en t_0 (s'il existe).
- L'étude en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.
- Si les dérivées à droite et à gauche sont différentes, la valeur des premières dérivées à gauche ou à droite non nulles, nous donne les vecteurs directeurs des demi-tangentes.

Méthode
Il est parfois astucieux d'utiliser un développement limité en t_0 de $\overrightarrow{f}(t)$ pour déterminer un vecteur directeur de la tangente à Γ en t_0 : en effet, si $\overrightarrow{f}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^p$ et si

$$\overrightarrow{f}'(t_0) = \cdots = \overrightarrow{f}^{(p-1)}(t_0) = \overrightarrow{0},$$

alors par la formule de Taylor-Young :

$$\overrightarrow{f}(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0) + o((t-t_0)^p),$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p).$$

Donc le coefficient vectoriel de $(t-t_0)^p$ dans le DL de $\overrightarrow{f}$ en t_0 est un vecteur directeur de la tangente en t_0.

Exemple (Tangente à l'astroïde en $t = 0$)
On reprend la courbe paramétrée $([-\pi;\pi], \overrightarrow{f})$ avec $\overrightarrow{f} : t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$.
Déterminer la tangente à cette courbe au point de paramètre $t_0 = 0$.

Nous avons vu que le point $M(0)$ est un point singulier. Deux méthodes pour trouver un vecteur directeur de la tangente en $M(0)$: trouver la première valeur de p pour laquelle $\overrightarrow{f}^{(p)}(0) \neq (0,0)$ ou utiliser un développement limité.
On obtient comme vecteur directeur de la tangente en $t_0 = 0$ le vecteur de coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$. La tangente est donc la droite horizontale $y = 0$.

Méthode
Les points où la tangente est horizontale ou verticale sont intéressants à déterminer afin de pouvoir tracer l'allure de la courbe Γ. Nous appellerons ces points des **points remarquables**. Il faut donc bien savoir les repérer.

- La tangente sera **horizontale** lorsqu'un vecteur directeur de la tangente a pour coordonnées $(\alpha, 0)$ (avec $\alpha \neq 0$).

  Pour un point régulier cela signifie que $y'(t_0) = 0$ et $x'(t_0) \neq 0$.
- La tangente sera **verticale** lorsqu'un vecteur directeur de la tangente a pour coordonnées $(0, \beta)$ (avec $\beta \neq 0$).

  Pour un point régulier cela signifie que $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$.

Remarque (Interprétations cinématiques)
Une application très concrète de ce chapitre est, en mécanique, l'étude du mouvement d'un point mobile. Dans ce cas :

- $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{f}(t)$ est le vecteur position du point M à l'instant t ;
- L'ensemble $\{M(t),\ t \in I\}$ s'appelle la trajectoire du point mobile ;
- $\overrightarrow{f}'(t_0)$ est la vitesse instantanée à $t = t_0$ et elle est souvent notée $\overrightarrow{v}(t_0)$;
- Un point stationnaire de la courbe correspond donc à un instant où la vitesse s'annule (un "point d'arrêt" sur la trajectoire) ;
- $\overrightarrow{f}''(t_0)$ est l'accélération instantanée à $t = t_0$ et elle est souvent notée $\overrightarrow{a}(t_0)$.

IV Construction d'une courbe paramétrée du plan

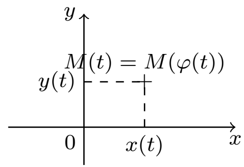
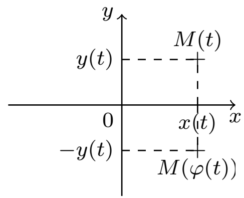
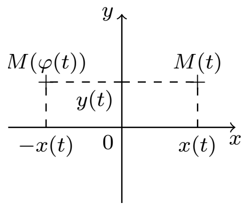
1) Réduction du domaine d'étude

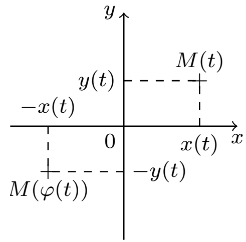
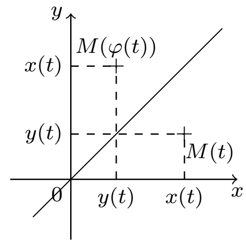
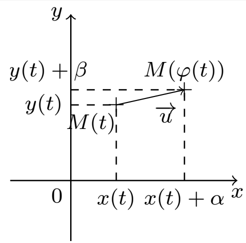
Méthode (Périodicité et symétries)
On considère une courbe plane Γ paramétrée par $\overrightarrow{f} = (x, y) : I \to \mathbb{R}^2$.

- **Périodicité** :
  Si x et y sont T-périodiques alors on a $M(t+T) = M(t)$ pour tout t, donc il suffit d'effectuer l'étude sur un intervalle de longueur T (par exemple $[0; T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$) pour obtenir toute la trajectoire.
- **Symétries** :
  On teste l'un des changements de variable du tableau suivant et si on obtient un résultat « remarquable », on réduit l'intervalle d'étude :

Intervalle d'origine	Changement de variable	Intervalle réduit
$[-a; a]$	$\varphi(t) = -t$	$[0; a]$
$[0; a]$	$\varphi(t) = a - t$	$\left[0; \frac{a}{2}\right]$
$]0; +\infty[$	$\varphi(t) = \frac{1}{t}$	$]0; 1]$

Pour obtenir la courbe sur tout le domaine de définition, on utilise le tableau suivant, qui donne les propriétés géométriques de la courbe en fonction du résultat obtenu par l'un des changements de variable du tableau précédent :

Résultat remarquable	Propriété de la courbe	Schéma
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$	Superposition de la courbe	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à l'axe (Ox)	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à l'axe (Oy)	

Résultat remarquable	Propriété de la courbe	Schéma
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie centrale par rapport à l'origine O	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la première bissectrice	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = \alpha + x(t) \\ y(\varphi(t)) = \beta + y(t) \end{cases}$	Translation de vecteur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$	

Exemple (Etude des symétries de l'astroïde)
On considère, de nouveau, la courbe paramétrée donnée par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Etudier les symétries de cette courbe.

- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, donc il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π et on obtient toute la courbe. On peut donc se placer sur $[-\pi; \pi]$.
- On a $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. On peut donc limiter notre étude à $[0; \pi]$, puis en faisant une symétrie d'axe (Ox) on obtiendra la courbe sur $[-\pi; 0]$, et donc la totalité de la courbe d'après le point précédent.
- On a $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$. On peut donc limiter notre étude à $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis en faisant une symétrie d'axe (Oy) on obtiendra la courbe sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.
- On a $\begin{cases} x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = y(t) \\ y\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = x(t) \end{cases}$. On peut donc limiter notre étude à $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ puis en faisant une symétrie par rapport à la première bissectrice on obtiendra la courbe sur $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Le calcul de $x\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$ ne donne rien de remarquable.

En résumé : étude et tracé sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, puis symétrie par rapport à la première bissectrice, puis symétrie par rapport à (Oy) et enfin symétrie par rapport à (Ox).

Exemple (La lemniscate de Bernoulli)
Etudier les symétries de la courbe donnée par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^4+1} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^3}{t^4+1} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Les fonctions x et y ne sont pas périodiques, il nous faut étudier les deux fonctions sur leur domaine de définition $\mathbb{R}$ pour obtenir toute la courbe.
- On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On peut donc limiter notre étude à $[0; +\infty[$ puis on obtient la courbe sur $]-\infty; 0]$, par une symétrie centrale de centre O.
- On a, pour $t \in]0; 1]$, $x\left(\dfrac{1}{t}\right) = y(t)$ et $y\left(\dfrac{1}{t}\right) = x(t)$. On peut donc limiter notre étude à $[0; 1]$ puis en faisant une symétrie par rapport à la première bissectrice on obtiendra la courbe sur $[1; +\infty[$.

En résumé : étude et tracé sur $[0; 1]$ puis symétrie par rapport à la première bissectrice et enfin symétrie centrale de centre O.

2) Position de la courbe par rapport à la tangente

Proposition 6 (Coordonnées du point courant dans le repère local en t_0).
Soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ une courbe paramétrée plane et $t_0 \in I$.
. . . .
Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^*$ les deux entiers tels que :
. . . .

- *p est le plus petit entier ≥ 1 tel que $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.*
  . . . .
- *q est le plus petit entier $> p$ tel que $\overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)$ est non colinéaire à $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)$.*
  . . . .

Alors $(M(t_0), \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0))$ est un repère du plan et :
. . . .

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \alpha(t)\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) + \beta(t)\overrightarrow{f}^{(q)}(t_0), \qquad \alpha(t) \underset{t\to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!}, \ \beta(t) \underset{t\to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}.$$

. . . .

Remarque
En fonction de la parité des entiers p et q, on obtient donc le signe au voisinage de t_0 des coordonnées de $M(t)$ dans le repère local $(M(t_0), \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0))$, ce qui permet de connaître la position de la courbe par rapport à sa tangente en t_0 (dirigée par $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)$).

Preuve :

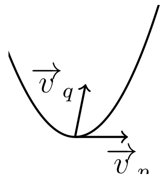
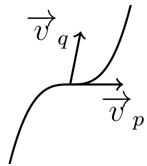
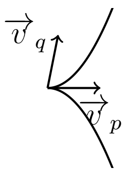
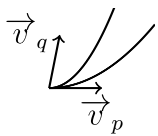
$\square$

Méthode (Étude locale d'une courbe paramétrée)

- On cherche les développements limités de x et y au voisinage de t_0. On choisit l'ordre des développements limités de façon à pouvoir écrire

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0) + (t-t_0)^p \overrightarrow{v}_p + \ldots + (t-t_0)^q \overrightarrow{v}_q + o((t-t_0)^q)$$

  avec $q > p \geq 1$ et $(\overrightarrow{v}_p, \overrightarrow{v}_q)$ famille libre.
- Suivant les valeurs de p et q on obtient les allures suivantes :

Si p est impair et q est pair :  Point ordinaire	Si p et q sont impairs :  Point d'inflexion
Si p est pair et q est impair :  Point de rebroussement de 1^{re} espèce	Si p et q sont pairs :  Point de rebroussement de 2^{e} espèce

Remarque

- Pour un point régulier, $p = 1$ et $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{f}'(t_0)$ donc p est impair : le point de paramètre t_0 est donc soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.
- Cette étude est surtout utile pour les points singuliers car pour un point singulier, le tableau de variation ne permet pas d'avoir le vecteur tangent.

Exemple (Allure locale de l'astroïde au voisinage de $t_0 = 0$)

Reprenons la courbe définie par le paramétrage : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'allure de la courbe au voisinage du point de paramètre $t_0 = 0$.

Nous avons déjà déterminé le développement limité de la fonction $\overrightarrow{f}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ au voisinage de 0. Nous avions obtenu :

$$\overrightarrow{f}(t) = (1,0) + t^2 \underbrace{\left(-\frac{3}{2}, 0\right)}_{\overrightarrow{v}_2} + t^3 \underbrace{(0,1)}_{\overrightarrow{v}_3} + \overrightarrow{o}(t^3).$$

On a ici $p = 2$ et $q = 3$ donc le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

3) Exemples d'étude complète

Méthode (Plan d'étude d'une courbe paramétrée)

1. Domaine de définition et réduction du domaine d'étude.
2. Tableau de variations.
3. Tangentes aux points remarquables et singuliers.
4. Tracé de la courbe.

Exemple (Etude complète de l'astroïde)
Reprenons une nouvelle fois la courbe définie par : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. **Réduction du domaine d'étude**
   Nous avons déjà vu qu'il suffit de faire l'étude sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, puis par une symétrie par rapport à la première bissectrice, une symétrie par rapport à (Oy) et enfin une symétrie par rapport à (Ox) nous obtiendrons la totalité de la courbe.

2. **Tableau de variations**

Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \\ y(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}$. On a donc le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$(\sqrt{2}/2)^3$
$y'(t)$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$(\sqrt{2}/2)^3$

Il est très important de faire bien apparaître tous les zéros de x' et y' pour bien repérer les points remarquables ou singuliers.

3. **Points remarquables et points singuliers**

   - Il n'y a pas de points remarquables ici.
   - Il n'y a ici qu'un seul point singulier : pour $t = 0$.

     On utilise ici l'étude établie dans l'exemple précédent : $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

     Cette étude n'est pas obligatoire en général. Elle peut être demandée dans l'énoncé ou alors être indispensable au tracé de la courbe si le tableau de variations ne nous suffit pas.

4. **Courbe** : voir figure.

Exemple (Etude complète de la strophoïde)
Traçons maintenant l'allure de la courbe définie par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$.

1. **Réduction du domaine d'étude**

   - Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.
   - On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. On peut donc limiter notre étude à $[0;+\infty[$ puis, en faisant une symétrie d'axe (Ox) on obtiendra la courbe sur $]-\infty;0]$.
   - Pour tout $t \in]0;+\infty[$, $x(1/t) = -x(t)$ mais le calcul de $y(1/t)$ ne donne rien de remarquable.

   En résumé, nous allons étudier et tracer notre courbe sur $[0;+\infty[$, puis par une symétrie d'axe (Ox) nous obtiendrons la totalité de la courbe.

2. **Tableau de variations**

On a $x'(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-(t^2+2-\sqrt{5})(t^2+2+\sqrt{5})}{(1+t^2)^2}$.

On pose alors $t_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ et on obtient le tableau de variations suivant :

t	0		t_0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$x(t_0)$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$

avec $x(t_0) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $y(t_0) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

3. **Points remarquables et singuliers**

- En $M(0)$, comme $x'(0) = 0$ et $y'(0) \neq 0$, la courbe possède une tangente verticale.
- En $M\left(t_0\right)$, comme $y'\left(t_0\right) = 0$ et $x'\left(t_0\right) \neq 0$, la courbe possède une tangente horizontale.

4. **Courbe** : voir figure 1. Il est intéressant de remarquer, avant de tracer la courbe, que le point $M(1)$ a pour coordonnées $(0, 0)$.

V Longueur d'un arc paramétré

Définition 7 (Longueur d'un arc).
Soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ une courbe du plan ou de l'espace et $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < t_2$.
. . . .
On appelle ***longueur de l'arc $M(t_1)M(t_2)$ de Γ*** *le réel* $L = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} ||\overrightarrow{f}'(t)||\mathrm{d}t$.
. . . .

Proposition 8 (Expression en coordonnées).
En notant $\overrightarrow{f} = (x, y, z)$, la longueur de l'arc $M(t_1)M(t_2)$ est :
. . . .
$L = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\mathrm{d}t$.
. . . .

Définition 9 (Longueur totale d'une courbe).
Soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ une courbe du plan ou de l'espace .
. . . .
On appelle ***longueur de la courbe Γ****, lorsqu'elle existe, le réel* $\displaystyle\int_I ||\overrightarrow{f}'(t)||\mathrm{d}t$.
. . . .

Remarque
Si I n'est pas un segment, la longueur de Γ est une intégrale impropre.

Exemple (Longueur de l'astroïde)
Calculons la longueur de la courbe définie par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in [-\pi; \pi].$$

- Nous avons étudié cette courbe et nous avons vu qu'on pouvait restreindre notre étude à $[0; \pi/4]$ puis par 3 symétries obtenir toute la courbe.
  La longueur totale L de la courbe est donc égale à 2^3 fois la longueur de l'arc $M(0)M(\pi/4)$.

- $$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4}\sqrt{(-3\sin(t)\cos^2(t))^2+(3\cos(t)\sin^2(t))^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/4}\sqrt{9\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/4}3\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4}\frac{3}{2}\sin(2t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{3}{4}\cos(2t)\right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

- En conclusion, la longueur de Γ est $L = 2^3 \times \dfrac{3}{4} = 6.$

VI Annexe : Lien avec la tangente au graphe d'une fonction dérivable

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point). On "sait" que le graphe de g possède une tangente en tout point $a \in I$: c'est la droite $\mathcal{T}_a$ passant par $(a; g(a))$ et dont le coefficient directeur est $g'(a)$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{T}_a$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :

$$y = g'(a)(x - a) + g(a).$$

Retrouvons ce résultat en utilisant les courbes paramétrées. Le graphe de g est l'ensemble :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in I \text{ et } y = g(x)\} = \{(t, g(t),\ t \in I\}.$$

Ce graphe est donc également la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in I,\ \overrightarrow{f}(t) = (t; g(t))$.

La fonction réelle g étant dérivable, la fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$ l'est aussi, et

$$\forall a \in I, \quad \overrightarrow{f}'(a) = (1; g'(a)) \neq (0; 0),$$

donc tous les points du graphe de g sont des points réguliers.

Ceci montre que Γ possède une tangente $\mathcal{T}_a$ en tout point $t = a$, dirigée par $\overrightarrow{f}'(a) = (1; g'(a))$ et passant par $A = (a; g(a))$. On peut en déduire une équation cartésienne de $\mathcal{T}_a$: pour tout point $M = (x; y)$ du plan, on a

$$M \in \mathcal{T}_a \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{f}'(a)) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-a & 1 \\ y-g(a) & g'(a) \end{vmatrix} = 0 \iff y = g'(a)(x-a)+g(a).$$