Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 6
Intégration sur un intervalle quelconque

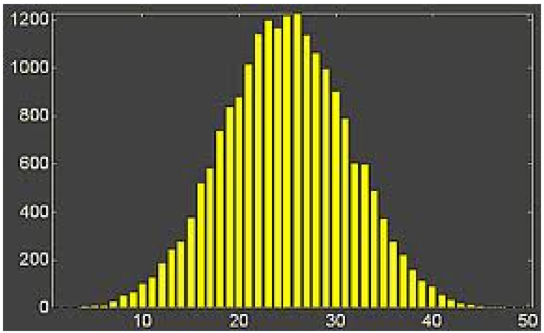


Table des matières

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'intégrale d'une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un **segment** $[a; b]$, c'est-à-dire un intervalle **fermé** (c'est-à-dire qui contient ses extrémités) et **borné** (c'est-à-dire de longueur finie).

On va étendre ici l'intégrale au cas de fonctions qui sont continues sur des intervalles **qui ne sont pas des segments**, c'est-à-dire :

- soit des intervalles bornés non fermés (c'est-à-dire du type $[a; b[$, $]a; b]$ ou $]a; b[$) ;
- soit des intervalles non bornés (c'est-à-dire du type $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; b]$, $]-\infty; b[$ ou $]-\infty; +\infty[]$).

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Intégrales impropres des fonctions continues

1) Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert borné ($I = [a; b[$ ou $]a; b]$)

On considère deux réels a, b tels que $a < b$.

Définition 1 (Convergence d'une intégrale impropre en b).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$, avec a,b réels tels que $a<b$.
. . . .

(i) *On dit que* **l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si**
. . . .
$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *possède une limite finie lorsque $x \to b^-$* .
. . . .
Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$
. . . .

(ii) *Sinon (si $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une lim. infinie ou pas de lim. quand $x \to b^-$)* ,
. . . .
on dit que **l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge** .
. . . .

Remarque
Pour tout $x \in [a;b[$, l'intégrale $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe car f est continue sur le **segment** $[a,x]$ et elle ne dépend que de x, **pas de t** (variable muette) !

Remarque
On dispose évidemment d'une définition analogue si $\boldsymbol{f \in \mathcal{C}^0(]a;b],\mathbb{K})}$.
Dans ce cas, en cas de convergence, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

Vocabulaire
Etudier **la nature** d'une intégrale impropre, c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

Exemple
Considérons la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, qui est continue sur $]0;1]$ (et pas $[0;1]$!)

Etudions la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

On a :

$$\forall x \in]0;1], \qquad \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x},$$

donc $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 2$. Ceci montre que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 2$.

Proposition 2 (Intégrale faussement impropre en b).
Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$ et si $\boldsymbol{f}$ **possède une limite finie en $\boldsymbol{b^-}$**, *alors*
....
l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ *converge, et on a* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{dt}$,
....
où $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{K})$ est le prolongement continu de f à $[a;b]$.
....
Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ *est* **faussement impropre** .
....

ATTENTION !
Il est essentiel que la borne supérieure b de l'intervalle soit **un réel**, et pas $+\infty$ (voir le paragraphe suivant).

Preuve : Pour $x \in [a,b[$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f. On a $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{K})$, donc $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$ existe. De plus, la fonction $G : [a,b] \to \mathbb{K}$ définie par $G(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)dt$ est une primitive de $\tilde{f}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. A fortiori, elle est continue en b, et
$G(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} G(b)$. En outre G coïncide avec F sur $[a,b[$, donc $F(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} G(b)$, ce qui montre bien que $\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b \tilde{f}(t)dt$. $\square$

Remarque
Evidemment, on peut transposer le résultat en a^+, si $f \in \mathcal{C}^0(]a;b], \mathbb{K})$.

Exemple
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente.
En effet, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0;1]$, et possède une limite finie en 0^+ (qui est égale à 1), puisque $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$.

2) Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle fermé non borné ($I = [a;+\infty[$ ou $]-\infty;b]$)

On considère maintenant des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$, où I est un intervalle du type $[a;+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$) ou $]-\infty;b]$.

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;+\infty[,\mathbb{K})$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(i) *On dit que* **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si**

$\displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ *possède une limite finie lorsque* $x \to +\infty$.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t.$

(ii) *Sinon (si* $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ *admet une limite infinie ou pas de limite lorsque* $x \to +\infty$*), on dit que* **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge** .

Exemple
Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1$,
car $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, car $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque
Là encore, on a une définition analogue si $f \in \mathcal{C}^0(]-\infty;b],\mathbb{K})$, avec $b \in \mathbb{R}$.
Dans ce cas, en cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

ATTENTION !

La notion d'intégrale faussement impropre n'existe pas dans ce contexte d'intervalle non borné ! Si f est continue sur $[a;+\infty[$ et possède une limite finie en $+\infty$, **on ne peut pas en déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge** (voir les exemples précédents pour s'en convaincre).

ATTENTION !

Le fait que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'est **ni suffisant**, **ni nécessaire** pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Par exemple :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, même si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$;
- on peut construire des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$ et dont l'intégrale impropre converge quand même (voir les exercices).

La situation est donc plus compliquée que pour les séries (on rappelle que $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

3) Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle ouvert ($I =]a;b[$ ou $]-\infty;b[$ ou $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$)

On considère maintenant des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$, où I est un intervalle du type $]a;b[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b[$ ou $]-\infty;+\infty[$.

Définition 4 (Convergence d'une intégrale doublement impropre).
Soit $f \in \mathcal{C}^0(]a;b[,\mathbb{K})$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On fixe $c \in]a;b[$.

(i) *On dit que* **l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge** *si* **les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent**.

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) *Dans le cas contraire (dès que l'une des deux intégrales précédentes diverge), on dit que* **l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$** *diverge*.

Remarque
Cette définition a bien un sens car la convergence des deux intégrales $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ (impropre en a) et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ (impropre en b) **ne dépend pas** du point c choisi.

ATTENTION !

Pour étudier la convergence d'une intégrale doublement impropre, il faut donc étudier **séparément** la convergence de deux intégrales impropres.

Exemple

Etudions la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t$ (doublement impropre car $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue sur $]-\infty; 0[$).

On doit donc (par exemple) étudier la nature de $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t$ et $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t$.

- Pour tout $x < -1$, on a $\int_{x}^{-1} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_{x}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$, donc $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t$ converge.
- Pour tout $x \in]-1; 0[$, on a $\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t$ diverge.

Finalement, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t$ diverge.

4) Propriétés de base

Les propriétés établies ici sont vraies pour des intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ impropres en a et/ou b, les bornes a et b étant des réels ou $\pm\infty$.

Proposition 5 (Linéarité de l'intégrale impropre).
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, où I est un intervalle d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
. . . .
et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. **Si les deux** *intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$*
. . . .
sont convergentes, **alors**, *pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t$*
. . . .
est convergente, et on a $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
. . . .

Preuve : Traitons seulement le cas où $I = [a; b[$ avec $a < b$ réels, les autres cas étant analogues.
Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ (ces deux fcts. sont définies sur I).
Fixons $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in I$, on a $\displaystyle\int_a^x (\lambda f + g)(t)dt = \lambda F(x) + G(x)$.
(par linéarité de l'intégrale **sur le segment $[a; x]$**).

En faisant tendre $x \to b^-$, on obtient (puisque F et G ont des limites finies en b^- par hypothèse) :

$$\int_a^x (\lambda f + g)(t)dt \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \lambda \lim_{x \to b^-} F(x) + \lim_{x \to b^-} G(x) \in \mathbb{K},$$

ce qui montre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt$ converge et vaut

$\displaystyle\lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$ $\square$

ATTENTION !

Pour appliquer ce résultat, il faut vérifier au préalable que **les deux** intégrales sont convergentes. Si ce n'est pas le cas, on a seulement droit à la linéarité de l'intégrale **sur les segments** inclus dans I.

Remarque («CV+DV=DV»)

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\mathrm{d}t$ diverge.

En effet on a $g = (f+g) - f$, donc si $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t$ converge, on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge (d'après la proposition précédente), ce qui est contradictoire.

Remarque («DV+DV= ?»)
Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divergent, alors **on ne peut rien dire** sur la nature de $\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t$.

Exemple
L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\ln(3)$.

En effet, en remarquant que $\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$ pour tout $t \geq 2$, on a

$$\forall x \geq 2, \qquad \int_2^x \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int_2^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = [\ln|t-1| - \ln|t+1|]_2^x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln(3).$$

Puisque $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1)=0$, on en déduit que $\displaystyle\int_2^x \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3)$.

ATTENTION !
Dans l'exemple précédent, **ne surtout pas décomposer** de la façon suivante :

$$«\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t - \int_2^{+\infty} \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t».$$

En effet, **cette écriture n'a aucun sens** puisque les deux intégrales du membre de droite sont divergentes (étant donné que les primitives $t \mapsto \ln(t-1)$ et $t \mapsto \ln(t+1)$ ne possèdent pas de limite finie en $+\infty$).

Proposition 6 (Convergence de l'intégrale impropre d'une fct. complexe).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
Alors, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$ convergent.
Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$.

Preuve : Là aussi, il suffit de traiter le cas $I = [a;b[$ avec $a > b$ réels.
Notons $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$. On a $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$. Par définition de l'intégrale sur un segment des fonctions à valeurs complexes, on a, pour tout $x \in [a;b[$:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f_1(t)\mathrm{d}t + i\int_a^x f_2(t)\mathrm{d}t$$

(f, f_1, f_2 sont bien continues sur $[a;x]$). On utilise alors les propriétés des limites de fonctions à valeurs complexes :

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ existe dans } \mathbb{C} \iff \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f_1(t)\mathrm{d}t \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f_2(t)\mathrm{d}t \end{array}\right. \quad \text{existent dans } \mathbb{R}.$$

On en déduit que l'intégrale impropre complexe $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales impropres réelles $\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f_2(t)\mathrm{d}t$ convergent. Enfin, si c'est le cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f_1(t)\mathrm{d}t + i\lim_{x\to b^-}\int_a^x f_2(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b f_2(t)\mathrm{d}t.$$

$\square$

Proposition 7 (Fonction continue positive d'intégrale impropre nulle).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{R})$, telle que $\boldsymbol{f \geq 0}$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \implies \forall t \in [a;b[,\ f(t) = 0.$$

Preuve : Vu que f est positive, la fonction $F : x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante (puisque c'est une primitive de f), et donc, pour tout $x \in [a;b[$:

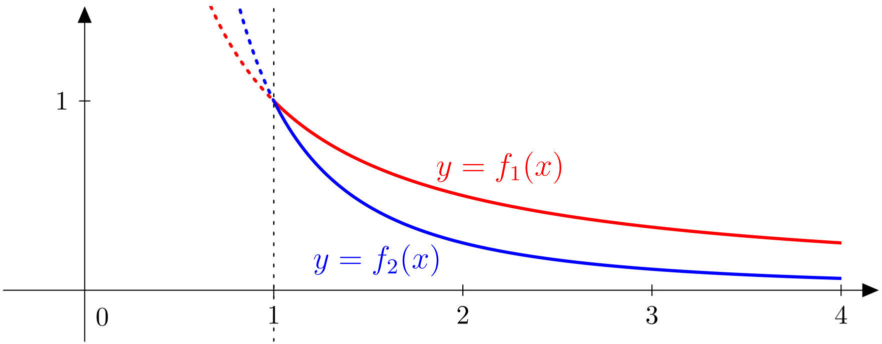
$$0 \leq \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \lim_{y\to b^-}\int_a^y f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

On a donc $\displaystyle\int_{[a;x]} f(t)\mathrm{d}t = 0$, ce qui entraîne (d'après le chapitre précédent), que f est nulle sur tout le segment $[a;x]$ (puisque continue, positive et d'intégrale nulle).
Ceci étant vrai pour tout $x \in [a;b[$, on en déduit que f est identiquement nulle sur $[a;b[$, puisque $[a;b[= \displaystyle\bigcup_{x\in[a;b[} [a;x]$. $\square$

5) Interprétation en termes d'aire sous la courbe

La notion d'intégrale impropre permet dans certains cas de définir **l'aire de domaines non bornés**.

Exemple
Notons $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.
Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ est convergente, on peut définir l'aire du domaine
$\Delta_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x^2}\}$. Cette aire est : $\mathcal{A}(\Delta_2) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1$.
En revanche, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ est divergente, donc le domaine
$\Delta_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}\}$ **n'a pas une aire finie**.



Le but de la prochaine section est de donner des méthodes pour **étudier la convergence** d'une intégrale impropre, **sans passer par les primitives de f**, qui hélas ne sont pas toujours calculables.

II Méthodes pour étudier la nature d'une intégrale impropre

Pour éviter les répétitions, les résultats seront énoncés uniquement pour des fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b[$ (semi-ouvert borné), mais **ils s'adaptent aux intervalles semi-ouverts quelconques (du type $]a; b]$, $]-\infty; b]$, ou $[a; +\infty[$).**

1) Exemples de référence

On dispose d'une liste d'exemples de référence, **qu'il faut connaître par coeur**. On utilisera ensuite cas de référence pour étudier les autres intégrales impropres.

a) En 0

Proposition 8 (Logarithme en 0^+).

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ *converge et* $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$.

. . . .

Preuve : Dans le chapitre précédent, on a vu que la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0; +\infty[$, donc pour tout $x \in]0; 1]$, on a

$$\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1,$$

puisque $x\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées).

$\square$

Proposition 9 (Intégrales de Riemann en 0^+).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ (impropre en 0) converge si et seulement si ....

$\alpha < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$. ....

Preuve : Pour tout réel α, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur tout segment $[x; 1]$ avec $0 < x \leq 1$.

- Si $\alpha \neq 1$, alors pour tout $x \in]0;1]$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Deux sous-cas se présentent, en fonction du signe de l'exposant $1-\alpha$:

* Si $\alpha < 1$, alors $x^{1-\alpha} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$.
* Si $\alpha > 1$, alors $x^{1-\alpha} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ diverge.

- Si $\alpha = 1$, alors pour tout $x \in]0;1]$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1}{t} \mathrm{d}t = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ diverge.

$\square$

b) En $+\infty$

Proposition 10 (Exponentielle en $+\infty$).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

. . . .

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

. . . .

Preuve : Pour tout réel α, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et pour tout $x \geq 0$:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ [1]_0^x = x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$$

On voit alors que

- si $\alpha \leq 0$, alors $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
- si $\alpha > 0$, alors $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$.

$\square$

Proposition 11 (Intégrales de Riemann en $+\infty$).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ (impropre en $+\infty$) converge si et
. . . .
seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$.
. . . .

Preuve : Pour tout réel α, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur tout segment $[1; x]$ avec $x \geq 1$.

- Si $\alpha \neq 1$, alors pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

  Deux sous-cas se présentent, en fonction du signe de l'exposant $1 - \alpha$:

  * Si $\alpha > 1$, alors $x^{1-\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha - 1}$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.
  * Si $\alpha < 1$, alors $x^{1-\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge.

- Si $\alpha = 1$, alors pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ diverge.

$\square$

Remarque

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est divergente pour n'importe quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En effet, cette intégrale doublement impropre converge si $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ convergent, mais cela ne se produit jamais, car cela équivaut respectivement à $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ (conditions incompatibles).

2) Résultats spécifiques aux fonctions positives

On dispose de résultats **spécifiques aux fonctions positives** pour étudier la convergence d'une intégrale impropre.

a) Critère de comparaison

Proposition 12 (Critère de comparaison pour les fonctions positives).
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{R})$ *telles que* $\mathbf{0 \leq f \leq g}$. *Alors,*
. . . .

(i) $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *converge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge, et dans ce cas,*
. . . .

$$0 \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$
. . . .

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *diverge* .
. . . .

Preuve : Considérons les fonctions $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, et $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt$. Elles sont croissantes sur $[a;b[$ (car ce sont des primitives de f et g qui sont positives). En outre, puisque $f \leq g$, on a (par croissance de l'intégrale sur un segment) $\forall x \in [a;b[, \ F(x) \leq G(x)$.

(*i*) Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction croissante G possède une limite finie en b^-, donc elle est majorée : il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\forall x \in [a;b[,\ G(x) \leq M$.
On en déduit que $F(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b[$, ce qui montre que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (étant croissante et majorée, la fonction F possède une limite finie en b^-).
Par passage à la limite dans l'inégalité $F(x) \leq G(x)$ (vraie pour tout $x \in [a;b[$), on en déduit que $\lim_{x \to b^-} G(x) \leq \lim_{x \to b^-} F(x)$, c'est-à-dire $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

(*ii*) C'est la contraposée du point précédent.

$\square$

Remarque (Une comparaison locale suffit)
En réalité, il suffit que l'inégalité $0 \leq f \leq g$ soit vraie au voisinage de b^- (c'est-à-dire sur un intervalle $[b-\delta; b[$ avec $\delta > 0$).
Cela vient du fait que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_{b-\delta}^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exemple

Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ converge.

On a $0 \leq \dfrac{1}{t^3+1} \leq \dfrac{1}{t^3}$ pour tout $t > 0$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ converge.

Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ converge (elle n'est impropre qu'en $+\infty$, pas en 0).

ATTENTION !

Dans l'exemple précédent, on ne peut pas utiliser le critère de comparaison directement sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (bien que l'inégalité $0 \leq \dfrac{1}{t^3+1} \leq \dfrac{1}{t^3}$ soit vraie sur cet intervalle), car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ (doublement impropre) diverge.

b) Critère des équivalents

Proposition 13 (Critère des équivalents pour les fonctions positives).
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{R})$ *telles que* $\boldsymbol{f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)}$.

Si $\boldsymbol{f \geq 0}$ au voisinage de $\boldsymbol{b^-}$, *alors* g *aussi et les intégrales impropres*

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *sont de même nature* .

Preuve : Puisque f et g sont réelles et équivalentes au voisinage de b^-, il existe un voisinage V de b et une fonction $\alpha : V \cap [a;b[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to b^-} \alpha(x) = 1, \qquad \forall x \in V \cap [a;b[, \quad g(x) = \alpha(x) f(x).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to b^-} \alpha(x) = 1$, on a $\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2}$ pour x suffisamment proche de b, c'est-à-dire :

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in [b-\delta; b[, \qquad \frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2}.$$

En multipliant cette inégalité par $f(x)$ (qui est positif sur un voisinage V' de b^- par hypothèse), on obtient

$$\forall x \in [b-\delta; b[\cap V', \qquad \frac{1}{2} f(x) \leq g(x) \leq \frac{3}{2} f(x),$$

et donc en particulier $g \geq 0$ au voisinage de b^-.

On conclut en utilisant le critère de comparaison pour les fonctions positives :

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b \frac{3}{2}f(t)\mathrm{d}t$ aussi (par linéarité de l'intégrale impropre), et donc $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge (vu que $g(t) \leq \frac{3}{2}f(t)$ au voisinage de b^-).
- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}f(t)\mathrm{d}t$ aussi (vu que $\frac{1}{2}f(t) \leq g(t)$ au voisinage de b^-), et donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (par linéarité de l'intégrale impropre).

Finalement, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge.

$\square$

Remarque (Un signe constant local suffit)
Ce résultat reste vrai si on remplace «positive» par «négative». L'important est que f garde un signe constant au voisinage de b^-.

ATTENTION !
Cette proposition ne s'applique pas si les fonctions f et g ne gardent pas un signe constant au voisinage de b^-, ou si f et g sont à valeurs complexes.

Exemple

Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

En effet, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t}$ est continue sur $]0;1]$, et $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}} \geq 0$, donc, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit par le critère des équivalents pour les fonctions positives que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Pour résumer :

Méthode

Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre d'une fonction f **positive**, on peut **comparer** f **à une fonction de référence** (c'est-à-dire dont on connaît la convergence de l'intégrale), en utilisant soit une inégalité, soit un équivalent.

3) Convergence absolue

Dans le cas où l'on a affaire à des fonctions qui ne sont pas positives, on dispose d'un outil supplémentaire pour étudier la convergence d'une intégrale impropre.

a) Définition et lien avec la convergence

Définition 14 (Intégrale impropre absolument convergente).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est ....

absolument convergente *lorsque $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente* .
....

Remarque

Cette définition ne sert à rien si f est réelle et de signe constant.

Théorème 15 (« CVA $\Longrightarrow$ CV »).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$. **Si** *$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente,* **alors** *elle est* ....

convergente. On a donc $\left(\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}\right)$.
....

Méthode
Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre d'une fonction de signe non constant ou à valeurs complexes, on peut **d'abord étudier sa convergence absolue**.

- Avantage : cela revient à travailler avec une fonction positive, sur laquelle on peut tester les critères de la partie précédente.
- Inconvénient : si l'intégrale ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.

Exemple
Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.
En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\right| \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

ATTENTION !
La réciproque du théorème 15 est fausse. Il existe des intégrales convergentes mais pas absolument convergentes.

Définition 16 (Intégrale impropre semi-convergente).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$*. On dit que l'intégrale impropre* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est* **semi-convergente** *lorsque* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente mais pas absolument convergente, c'est-à-dire lorsque* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge et* $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ *diverge* .

Exemple

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente (voir plus loin).

Proposition 17 (Inégalité intégrale/module).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$*. On suppose que l'intégrale impropre* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est* **absolument convergente**. *Alors, on a* $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$. .

ATTENTION !
Les bornes a et b doivent être dans le "bon sens" (c'est-à-dire $a < b$) !

Preuve : Pour tout $x \in [a; b[$, la fonction f est continue sur le segment $[a; x]$, donc on a (d'après le chapitre précédent) : $\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$.
En outre, $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$ (car l'intégrale impropre est absolument convergente par hypothèse). Puis $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe aussi car la convergence absolue entraîne la convergence de l'intégrale. On obtient donc (par continuité du module) que

$$\lim_{x\to b^-} \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|.$$

On conclut en passant à la limite lorsque $x \to b^-$ dans l'inégalité $\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$:

$$\left|\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \lim_{x\to b^-} \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

$\square$

b) Exemples d'utilisation de la convergence absolue

Méthode
Pour étudier la convergence absolue d'une intégrale impropre, on peut :

- chercher à **majorer $|f(t)|$** par une fonction simple dont l'intégrale converge.
- chercher à déterminer **un équivalent simple de $|f(t)|$** lorsque $t \to b^-$.
- examiner **la limite de $t^\alpha f(t)$** lorsque $t \to 0^+$ ou $t \to +\infty$, pour **comparer f à une fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$** au voisinage de 0 ou de $+\infty$.

Exemple
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\mathrm{d}t$.

- la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}$ est continue sur $]0;1]$ (puisque $\frac{1}{t}$ est bien défini et $\sqrt{t}+t > 0$ pour tout $t \in]0;1]$) ;
- pour tout $t \in]0;1]$, on a $\left|\dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\right| = \dfrac{\left|\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right|}{\sqrt{t}+t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}+t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge donc, par le critère de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\right| \mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemple
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\mathrm{d}t$.

- la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ (puisque pour tout $t \geq 0$, $1+t^3+t\sin^2(t) \geq 1$, donc le dénominateur ne s'annule pas) ;
- on a $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\right| = \dfrac{1}{1+t^3+t\sin^2(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ (puisque $|1+t\sin^2(t)| \leq 1+t = \underset{t\to+\infty}{o}(t^3)$). Vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit par le critère des équivalents que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\right| \mathrm{d}t$ converge, et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\right| \mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\sin(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On pose $f(t) = \dfrac{\ln(t)\sin(t)}{1+t^2}$ pour tout $t \geq 1$. La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$, et

$$|t^\alpha f(t)| = \frac{t^\alpha \ln(t)\ |\sin(t)|}{1+t^2} \leq \frac{t^\alpha \ln(t)}{1+t^2}.$$

Vu que $\dfrac{t^\alpha \ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{2-\alpha}}$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ si on choisit $\alpha < 2$.

Avec un tel choix de α, on a donc $|t^\alpha f(t)| \leq 1$ pour t suffisamment grand, c'est-à-dire

$$\exists t_0 \geq 1, \qquad t \geq t_0 \implies |f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Si on suppose de plus que $\alpha > 1$ (ici $\alpha = 3/2$ par exemple), on obtient alors (par le critère de comparaison pour les fonctions positives) que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\sin(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

III Comparaison série-intégrale

1) Théorème général

On remarque une forte **analogie** entre l'étude de la convergence des **séries numériques** et celle des **intégrales impropres en $+\infty$** :

- pour une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on dit que $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ existe ;
- pour une fonction continue $f : [a;+\infty[\to \mathbb{K}$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)\mathrm{d}t$ existe.

On a en fait un lien entre la convergence des séries et des intégrales impropres. Le résultat suivant est fondamental, et surtout sa démonstration :

Théorème 18 (Théorème de comparaison série-intégrale).
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $f : [n_0;+\infty[\to \mathbb{R}$ **continue, positive et décroissante** .
. . . .

Alors on a l'équivalence : $\left(\sum\limits_{n\geq n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}\right)$.
. . . .

ATTENTION !

Ce théorème dit que sous certaines conditions, la série numérique $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont **de même nature, mais il ne dit pas que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$, cette égalité est fausse en général !**

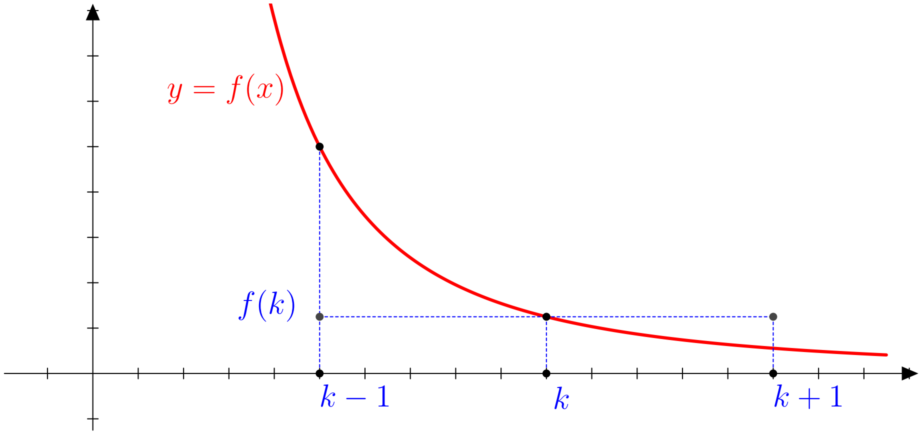
Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ alors que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$.

Preuve : **Idée essentielle :** la monotonie de f permet de comparer facilement les sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et les intégrales $F(n) = \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

On commence par faire la comparaison sur des intervalles de largeur 1 : pour tout entier $k \geq n_0 + 1$, la fonction f est décroissante sur les intervalles $[k-1; k]$ et $[k; k+1]$, donc

$$\forall k \geq n_0 + 1, \qquad \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

(et l'inégalité de gauche reste vraie pour $k = n_0$).


$y = f(x)$
$f(k)$
$k-1$
k
$k+1$

- En sommant l'inégalité de gauche de $k = n_0$ à n, on obtient

$$\forall n \geq n_0, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k),$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles) :

$$\forall n \geq n_0, \qquad \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

On a donc $F(n+1) \leq S_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

- En sommant l'inégalité de droite de $k = n_0 + 1$ à n, on obtient

$$\forall n \geq n_0 + 1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt,$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles) :

$$\forall n \geq n_0 + 1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt.$$

On a donc $S_n - f(n_0) \leq F(n)$ pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, et cette inégalité reste vraie pour $n = n_0$ puisque $S_{n_0} - f(n_0) = 0 = F(n_0)$.

Finalement, on a donc l'encadrement :

$$\forall n \geq n_0, \qquad F(n+1) \leq S_n \leq f(n_0) + F(n).$$

Montrons alors l'équivalence voulue :

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite réelle lorsque $x \to +\infty$, donc elle est majorée par un réel M_1. On en déduit d'après l'encadrement précédent :

$$\forall n \geq n_0, \qquad S_n \leq f(n_0) + F(n) \leq f(n_0) + M_1.$$

  Ceci montre que la suite (S_n) est majorée, mais elle est aussi croissante (car la série $\sum f(n)$ est à termes positifs), donc elle converge.
  Ainsi, la série $\sum f(n)$ est convergente.

- Réciproquement, si la série $\sum f(n)$ converge, alors la suite (S_n) est convergente, donc majorée par un réel M_2. On va alors montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite réelle en $+\infty$.
  Tout d'abord, F est croissante car $F' = f$ est positive. Ensuite, on a :
  $$\forall n \geq n_0, \qquad F(n+1) \leq S_n \leq M_2.$$
  Pour tout réel $x \geq n_0$, on a donc $F(x) \leq F(n+1) \leq M_2$ (en notant $n = E(x)$ la partie entière de x). Ainsi, F est croissante et majorée, ce qui prouve l'existence de $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, et donc la convergence de l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

$\square$

2) Applications

On peut déduire du théorème précédent une démonstration de la convergence des séries de Riemann. Rappelons l'énoncé :

Proposition 19 (Séries de Riemann).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

. . . .

Preuve :

- si $\alpha > 0$, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha} = e^{-\alpha \ln(x)}$ est continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$, donc par le théorème de comparaison série-intégrale, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$. Mais on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \in]0; 1]$.
- si $\alpha \leq 0$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0).

$\square$

Méthode
En plus du résultat de convergence, la technique de comparaison série-intégrale est souvent utile pour **encadrer finement des sommes partielles** $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ de séries (convergentes ou divergentes). Il faut donc être capable d'adapter la démonstration du théorème aux différents exemples, d'où la nécessité de bien la maîtriser.

Exemple (Sommes partielles de la série harmonique)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
Déterminer un encadrement de H_n, puis en déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $[1;+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx$$

(et l'inégalité de gauche reste vraie pour $k = 1$).
Par sommation de ces inégalités pour $k = 2$ à n, on en déduit :

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{dx}{x},$$

soit

$$\forall n \geq 2, \qquad \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n).$$

On en déduit l'encadrement :

$$\forall n \geq 2, \qquad \ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(et cela reste vrai pour $n = 1$ car $H_1 = 1$). En réécrivant ceci sous la forme

$$\forall n \geq 2, \qquad \ln(n) \times \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \ln(2)}{\ln(n)}\right) \leq H_n \leq \ln(n) \times \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right),$$

on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et donc $H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Remarque
On peut aussi adapter cette technique au cas où la fonction f est croissante.

Exemple
Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{3/2}$.
En effet, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0; +\infty[$, donc

$$\forall k \geq 1, \quad \int_{k-1}^{k} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{x} dx.$$

En sommant de $k = 1$ à $k = n$, on obtient :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_{0}^{n} \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \int_{1}^{n+1} \sqrt{x} dx.$$

En notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$, on a donc l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2}{3} n^{3/2} \leq S_n \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2}.$$

Le théorème des gendarmes entraîne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{\frac{2}{3} n^{3/2}} = 1$, d'où l'équivalent annoncé.

IV IPP et changement de variables généralisés

On ne traitera par commodité que le cas des intégrales de fonctions continues sur un intervalle du type $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$ (avec $a<b$ réels), mais **les résultats présentés ici restent vrais pour des fonctions continues sur des intervalles du type $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$, ou $[\boldsymbol{a};+\infty[$ ou $]-\infty;\boldsymbol{b}]$**.

1) Intégration par parties généralisée

ATTENTION !

Il est interdit de faire des I.P.P. directement sur des intégrales impropres.
En effet, si on écrit « $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$» et que $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ est impropre en b, cette écriture peut ne pas avoir de sens, même si $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ est convergente. En effet, la seconde intégrale pourrait être divergente, ou/et le produit $u(t)v(t)$ pourrait ne pas posséder de limite finie en b^- (rappelons que u et v ne sont pas définies en b).

Méthode

Pour faire une intégration par parties sur une intégrale impropre :

- on **se ramène à un segment** $[a;x]\subset[a;b[$,
- on fait une IPP "classique" sur le segment $[a;x]$,
- on fait tendre $x\to b^-$ **à la fin**.

Exemple
Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ et la calculer.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

(d'après la formule d'I.P.P. appliquée avec $u : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ sur le segment $[1;x]$). En faisant tendre $x \to +\infty$, on obtient, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 1$, ce qui montre que l'intégrale étudiée est convergente et vaut 1.

Méthode
Souvent, lorsque l'étude de la convergence absolue a échoué, une intégration par parties permet de savoir si l'intégrale étudiée est quand même semi-convergente.

Exemple
Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

En effet, elle n'est pas absolument convergente (puisque $\left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\right| = \frac{1}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge), mais pour tout $x > 1$, on a (par I.P.P) :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{it}}{it}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{ix} - \frac{\mathrm{e}^{i}}{i} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, car $\left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\right| = \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{C}$ (puisque la convergence absolue entraîne la convergence). Vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{ix}=0$ (le module est $\dfrac{1}{x}$), on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{i}}{i}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t\in\mathbb{C},$$

et donc l'intégrale étudiée est convergente.

2) Changement de variable généralisé

Proposition 20 (Changement de variables pour les intégrales impropres). *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$, et soit $\varphi : [\alpha;\beta[\to [a;b[$ une* **bijection** *strictement*
. . . .
croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales impropres $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ et
. . . .
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence .
. . . .

Rappel
Si $\varphi : [\alpha;\beta[\to [a;b[$ est une bijection continue et strictement croissante, alors on a automatiquement $\lim\limits_{x\to\beta^-}\varphi(x) = b$, ainsi que $\lim\limits_{y\to b^-}\varphi^{-1}(y) = \beta$.

Preuve : On fixe $x \in [\alpha;\beta[$. Par hypothèse, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha;x]$ et f est continue sur le segment $\varphi([\alpha;x]) = [a;\varphi(x)] \subset [a;b[$ (rappelons que φ est croissante), donc d'après la formule de changement de variable (vue au chapitre précédent) :

$$\int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Dès lors :

- Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\lim\limits_{x\to\beta^-} \int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$ (puisque $\lim\limits_{x\to\beta^-} \varphi(x) = b$), ce qui montre que $\lim\limits_{x\to\beta^-} \int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ existe dans $\mathbb{K}$, et donc que l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge. Enfin, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u = \lim_{x\to\beta^-} \int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u = \lim_{x\to\beta^-} \int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

- Si $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge, alors $\lim\limits_{x\to\beta^-} \int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ existe dans $\mathbb{K}$.
Mais φ étant bijective, on peut écrire, pour tout $y \in [a;b[$:

$$\int_a^y f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

Ceci entraîne alors la convergence et l'égalité voulues, puisque $\lim\limits_{y\to b^-} \varphi^{-1}(y) = \beta$.

$\square$

Remarque

- Si le changement de variable $\varphi : [\alpha;\beta[\to]b;a]$ est une bijection strictement **décroissante** de classe $\mathcal{C}^1$, on dispose d'un résultat analogue : en cas de convergence, les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont égales.

- Le théorème de changement de variable généralisé est également **vrai pour des intégrales doublement impropres** : dans ce cas, on a $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$, et f continue sur $]a;b[$.

ATTENTION !

Un changement de variable φ qui n'est **pas $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a;b]$** mais **seulement $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b[$** peut transformer une intégrale "classique" (c'est-à-dire sur un segment où f est $\mathcal{C}^0$) en intégrale impropre convergente.

Exemple

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(x/2)$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ (le dénominateur ne s'y annule pas), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ est une intégrale "classique" (on peut donc la considérer comme une intégrale impropre convergente !).
En outre, le changement de variable $x \mapsto \varphi(x) = \tan(x/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi[$ (mais pas sur $[0;\pi]$), il définit une bijection strictement croissante de $[0;\pi[$ vers $[0;+\infty[$.
En appliquant la formule de changement de variable pour les intégrales impropres, on obtient (en posant $u = \tan(x/2)$, «$\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2(x/2))\mathrm{d}x$», et compte tenu de la formule $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ vraie pour tout $x \in [0;\pi[$) :

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^\pi \frac{(1+\tan^2(x/2))\,\mathrm{d}x}{3+\tan^2(x/2)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{3+u^2}.$$

On remarque donc que l'intégrale «classique» a été transformée en une intégrale impropre convergente, mais facile à calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{3+u^2} = \lim_{U\to+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^U = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Méthode

Si on veut éviter l'utilisation (un peu délicate) du théorème de changement de variable généralisé, on peut là aussi :

- se ramener à un segment $[\alpha; x] \subset [\alpha; \beta[$,
- faire un changement de variables "classique" sur le segment $[\alpha; x]$,
- **à la fin**, faire tendre $x \to \beta^-$.

V Fonctions intégrables

Dans cette dernière section, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On notera $\sup(I)$ l'extrémité droite de I (éventuellement égale à $+\infty$), et $\inf(I)$ son extrémité gauche (éventuellement égale à $-\infty$).

1) Définition

Définition 21 (Fonction intégrable sur un intervalle quelconque).
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On dit que ***f* est intégrable sur *I*** *si l'intégrale*
. . . .
$\displaystyle\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ *est* **absolument** *convergente.*
. . . .
Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_I f = \int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$.
. . . .

Remarque

- Si I est un segment, alors f est automatiquement intégrable, puisque $|f|$ est continue sur I, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)|\mathrm{d}t$ n'est pas impropre.
- Si I n'est pas un segment, alors pour étudier l'intégrabilité de f sur I, on étudie la

convergence de l'intégrale $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)|\mathrm{d}t$, **et pas simplement la convergence de** $\boldsymbol{\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t}$.

ATTENTION !
Une fonction f dont l'intégrale impropre sur I est semi-convergente **n'est pas intégrable** ! Pourtant l'intégrale impropre $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ existe quand même...
En résumé, l'intégrabilité d'une fonction est une propriété plus forte que la simple convergence d'une intégrale impropre.

Exemple
La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, car on a vu que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

ATTENTION !
En principe, la notation $\int_I f$ est réservée aux fonctions intégrables.
Eviter d'écrire par exemple $\int_{[1;+\infty[} \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$. Toutefois, on peut écrire quand même $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$ car cette intégrale est (semi-)convergente.

2) Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 22 (Propriétés immédiates).

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

(i) *Si* f *est intégrable sur* I*, alors* f *est intégrable sur tout intervalle* $J \subset I$.

(ii) f *est intégrable sur* $I \iff f$ *est intégrable sur l'intérieur* $\mathring{I}$

($\mathring{I}$ *est l'intervalle ouvert obtenu en supprimant les extrémités de* I) .

(iii) *Si* $|f| \leq \varphi$ *avec* φ *continue et intégrable sur* I*, alors* f *est intégrable sur* I.

(iv) *Si* f *est intégrable sur* I*, alors* $|f|$ *aussi, et* $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Proposition 23 (Structure d'espace vectoriel).

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$*. On suppose que* f *et* g *sont intégrables sur* I.

Alors, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$*, la fonction* $\lambda f + g$ *est intégrable sur* I *et*

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Preuve : La fonction $\lambda f+g$ est continue sur I, tout comme f et g, et on a

$$|\lambda f+g| \leq |\lambda||f|+|g|.$$

Vu que les intégrales impropres $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)|\mathrm{d}t$ et $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |g(t)|\mathrm{d}t$ sont convergentes par hypothèse, on en déduit par linéarité de l'intégrale impropre que $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} (|\lambda||f(t)|+|g(t)|)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Ainsi, la fonction $|\lambda||f|+|g|$ est intégrable sur I, ce qui entraîne d'après l'inégalité et la proposition précédente que la fonction $\lambda f+g$ est intégrable sur I.

Enfin, l'égalité $\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$ résulte encore de la linéarité de l'intégrale impropre (puisque $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} g(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes).

$\square$

Remarque

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I forme ainsi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'opération $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel, qui possède les propriétés de positivité ($f \geq 0 \Rightarrow \int_I f \geq 0$) et de croissance ($f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$).