Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 4
Réduction des endomorphismes : diagonalisation

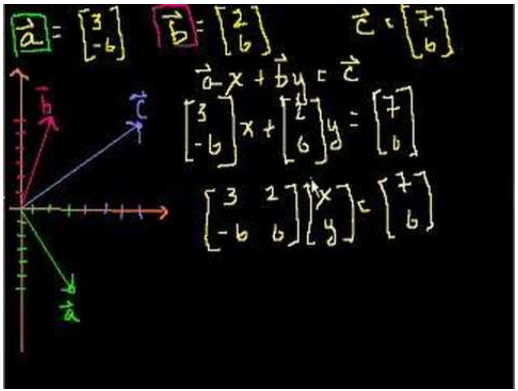

Table des matières

<u>But</u> : Etant donné un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (en dimension finie), trouver une **base de E dans laquelle la matrice de f est la plus simple possible** (diagonale ou triangulaire). La "réduction" d'un endomorphisme f est donc la recherche d'une telle base, afin de représenter f simplement.

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Sous-espaces stables par un endomorphisme

1) Définition

Définition 1 (Sous-espace stable par un endomorphisme).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et soit
. . . .
F un sous-espace vectoriel de E. On dit que
. . . .
F* est stable par *f *si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si $x \in F \implies f(x) \in F$* .
. . . .

Exemple
Soit $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ l'endomorphisme de dérivation $f(P) = P'$.
Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f.

En effet, $f(1) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(X^n) = nX^{n-1}$, donc, par linéarité de f,

$$\begin{cases} f(\mathbb{K}_0[X]) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \subset \mathbb{K}_0[X] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(\mathbb{K}_n[X]) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X] \end{cases}.$$

Lemme 2 (Restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et soit F un sous-espace vectoriel de E **stable par f**.
Alors, la restriction $f_{|_F} : F \to F$ est un endomorphisme de F.

Preuve : A priori, la restriction de f à F est une application $f_{|_F} : F \to E$. Vu que $f(F) \subset F$, on a $f_{|_F} : F \to F$. Enfin, la linéarité de $f_{|_F}$ résulte de celle de f. $\square$

ATTENTION !
Si F n'est pas stable par f, ça ne marche pas ! On peut seulement dire que la restriction $f_{|_F}$ est une application linéaire de F dans E.

2) Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable

Remarque
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit f un endomorphisme de E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

On considère $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ de E.

Alors, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ a une forme par blocs :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

avec $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $(k = \dim(F))$.

En effet, si $1 \leq i \leq k$, le vecteur e_i est dans F, donc son image $f(e_i)$ aussi (puisque F est stable par f). On a donc $f(e_i) \in Vect(e_1, \cdots, e_k)$, c'est-à-dire que pour i compris entre 1 et k, les vecteurs $f(e_i)$ ont des coordonnées nulles suivant $e_{k+1}, \cdots, e_n$, et cela explique la forme de la matrice (dans les k premières colonnes, les coefficients sous la k^e ligne sont nuls).

Exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y + z = 0\}$.

1. Déterminer une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathcal{P}$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f.
3. On pose $\overrightarrow{w_1} = (0; 0; 1)$. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(f)$.
4. On pose $\overrightarrow{w_2} = (1; 1; 1)$. Montrer que $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(f)$. Interpréter la forme de M_2.

1. On a $\mathcal{P} = Vect((1, 0, 0), (0, 1, -1))$. On pose $\vec{u} = (1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, -1)$.

   La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est génératrice de $\mathcal{P}$ et libre (deux vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de $\mathcal{P}$.

2. Montrons que le plan $\mathcal{P}$ est stable par f.

   Comme nous disposons d'une base de $\mathcal{P}$ il suffit ici de montrer que $f(\vec{u}) \in \mathcal{P}$ et $f(\vec{v}) \in \mathcal{P}$.

   Or, $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u}) = (1, -1, 1) \in \mathcal{P}$.

De plus, $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{v}) = (1,1,-1) \in \mathcal{P}$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ est stable par f.

3. Déterminons la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_1})$.

   Nous avons déjà calculé $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$. Il nous manque $f(\vec{w_1})$.

   Or, $M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{w_1}) = (0,1,1) = \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w_1}$.

   En résumé : $\begin{array}{l} f(\vec{u}) = (1,-1,1) = 1\vec{u} + (-1)\vec{v} + 0\vec{w_1} \\ f(\vec{v}) = (1,1,-1) = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 0\vec{w_1} \\ f(\vec{w_1}) = (0,1,1) = 0\vec{u} + 1\vec{v} + 2\vec{w_1} \end{array}$.

   Donc $M_1 = Mat_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w_1})}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Déterminons la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_2})$.

   Nous avons déjà calculé $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$. Il nous manque $f(\vec{w_2})$.

   Or, $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{w_2}) = (2,2,2)$.

En résumé : $\begin{array}{l} f(\vec{u}) = (1,-1,1) = 1\vec{u} + (-1)\vec{v} + 0\vec{w_2} \\ f(\vec{v}) = (1,1,-1) = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 0\vec{w_2} \\ f(\vec{w_2}) = (2,2,2) = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 2\vec{w_2} \end{array}$.

Donc $M_2 = Mat_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w_2})}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation : La forme de M_2 (en deux blocs) indique que le plan $\mathcal{P} = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est stable par f, mais aussi la droite $\mathcal{D} = Vect(\overrightarrow{w}_2)$. On a donc une décomposition de l'espace en deux sous-espaces stables par f :

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}.$$

Remarque
Il faut aussi être capable de reconnaître un sous-espace stable à partir de la matrice d'un endomorphisme.

Exemple
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Uniquement avec la forme de la matrice, on peut affirmer que $F = Vect(X, X^2)$ est un sous-espace stable par f.
En effet, la lecture des colonnes de A dit que :

$$\begin{cases} f(1) = 1 - 2X^2 + 2X^3 \\ f(X) = 2X - X^2 \\ f(X^2) = 3X - X^2 \\ f(X^3) = -1 + 4X + 3X^3 \end{cases}.$$

Donc on a bien $f(X) \in F$ et $f(X^2) \in F$, et comme (X, X^2) est une base de F on peut affirmer que $f(F) \subset F$.

3) Exemples classiques de sous-espaces stables

Exemple

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

(i) le sous-espace $Im(f)$ est stable par f ;

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-espace $Ker(f - \lambda Id_E)$ est stable par f.

En effet :

(i) si $x \in Im(f)$, alors $f(x) \in Im(f)$ de façon immédiate (en fait, on n'utilise pas le fait que $x \in Im(f)$: même si $x \in E$, on a $f(x) \in Im(f)$).

(ii) si $x \in Ker(f - \lambda Id_E)$, alors $f(x) = \lambda x$, donc

$$(f - \lambda Id_E)(f(x)) = f(f(x)) - \lambda f(x) = f(\lambda x) - \lambda f(x) = 0_E,$$

(par linéarité de f) ce qui montre que $f(x) \in Ker(f - \lambda Id_E)$.

Exemple

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.
Alors, le sous-espace $Im(f)$ est stable par g.

On doit ici montrer que $g(Im(f)) \subset Im(f)$.

Soit $\vec{u} \in Im(f)$. On sait alors qu'il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{u} = f(\vec{a})$.
Donc on a $g(\vec{u}) = g(f(\vec{a}))$. Or, f et g commutent donc $g(\vec{u}) = f(g(\vec{a}))$.
Ainsi, $g(\vec{u}) \in Im(f)$.
On a donc montré que $g(Im(f)) \subset Im(f)$ c'est-à-dire que $Im(f)$ est stable par g.

II Eléments propres d'un endomorphisme

1) Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas nécessairement de dimension finie).
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.

Définition 3 (Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme).
On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** *de f s'il existe un vecteur*
$x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$. Dans ce cas, on dit que
x est un **vecteur propre** *de f associé à la valeur propre λ* .

ATTENTION !
Un vecteur propre n'est **pas nul** par convention, mais une valeur propre peut-être nulle.

Remarque

- Un vecteur propre x associé à $\lambda = 0$ est en fait un vecteur non nul de $Ker(f)$.
  En effet, $f(x) = 0_E$ signifie $x \in Ker(f)$.

- Si x est un vecteur propre de f, alors il est associé à une unique valeur propre :
En effet, si $f(x) = \lambda x = \mu x$ avec $x \neq 0_E$, alors $(\lambda - \mu)x = 0_E$, et donc $\lambda - \mu = 0$ (puisque $x \neq 0_E$).

- En revanche, si λ est une valeur propre de f, alors il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ :
En effet, si $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$, donc αx (qui est non nul) est aussi un vecteur propre associé à λ.

Proposition 4 (Caractérisation des valeurs propres).
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \iff f - \lambda Id_E \text{ non injective}$$

Preuve : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x) = \lambda x \iff f(x) - \lambda Id_E(x) = 0_E \iff (f - \lambda Id_E)(x) = 0_E \iff x \in Ker(f - \lambda Id_E),$$

donc :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \exists x \in Ker(f - \lambda Id_E),\ x \neq 0_E.$$

La deuxième équivalence résulte du fait qu'un endomorphisme est injectif si et seulement si son noyau est nul. □

Proposition 5 (Vecteur propre et droite stable).
Soit $x \in E$ un vecteur **non nul**. *On a l'équivalence :*

$$x \text{ est vecteur propre de } f \iff \text{la droite } \mathcal{D} = Vect(x) \text{ est stable par } f$$

Preuve : $\boxed{\Longrightarrow}$ Si x est un vecteur propre de f, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ (la valeur propre associée) tel que $f(x) = \lambda x$. En notant $\mathcal{D} = Vect(x)$, montrons alors que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Si $y \in \mathcal{D}$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Donc

$$f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\lambda x) = (\lambda\alpha)x,$$

ce qui montre que $f(y) \in Vect(x) = \mathcal{D}$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\mathcal{D} = Vect(x)$ est stable par f, alors $f(x) \in \mathcal{D}$, puisque $x \in \mathcal{D}$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$, et donc x est vecteur propre de f.

$\square$

Définition 6 (Sous-espace propre d'un endomorphisme).
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une **valeur propre** *de $f \in \mathcal{L}(E)$.*
On appelle **sous-espace propre associé à $\boldsymbol{\lambda}$** *l'ensemble $E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E)$.*

Remarque

- Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est donc un sous-espace vectoriel **non nul** de E, et il est stable par f (voir exemple p.8).
- On a $E_\lambda(f) = \{x \in E,\ (f - \lambda Id_E)(x) = 0_E\} = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\}$:
  cet ensemble est donc formé des vecteurs propres de f associés à λ **ainsi que du vecteur nul**.

Exemple

- Si 0 est valeur propre de f, alors le sous-espace propre associé à $\lambda = 0$ est $E_0(f) = Ker(f)$.
- Si 1 est valeur propre de f, alors le sous-espace propre associé à $\lambda = 1$ est $E_1(f) = Ker(f - Id_E) = \{x \in E,\ f(x) = x\}$.
  C'est l'ensemble des vecteurs invariants par f ("points fixes de f").

Exemple (Valeurs propres d'une homothétie vectorielle)
Soit $\boldsymbol{f = \alpha Id_E}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.
Calculons les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

Pour les déterminer, procédons par analyse-synthèse :

1. Analyse : si λ est valeur propre de l'homothétie $f = \alpha Id_E$, alors notons $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a $f(x) = \lambda x$, mais aussi $f(x) = (\alpha Id_E)(x) = \alpha x$, donc $(\lambda - \alpha)x = 0_E$, ce qui conduit à $\lambda = \alpha$ puisque le vecteur x est non nul. Ceci montre que f possède au plus une valeur propre : le scalaire α.
2. Synthèse : le scalaire α est effectivement une valeur propre de f, puisque tous les vecteurs x non nuls sont vecteurs propres associés (vu que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in E$).

Finalement, $f = \alpha Id_E$ possède une seule valeur propre : $\lambda = \alpha$, et le sous-espace propre associé est $E_\alpha(f) = Ker(f - \alpha Id_E) = Ker(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$.

Exemple (Valeurs propres de la dérivation)
Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est un $\mathbb{R}$-ev de dimension infinie).
Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $\boldsymbol{f(y) = y'}$.
Calculons les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

- Tout réel λ est valeur propre de f :
  en effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f(y) = \lambda y$ possède des solutions non nulles, puisqu'il s'agit de l'équation différentielle $y' = \lambda y$, dont les solutions sont les fonctions $y : x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  Les vecteurs propres associés à λ sont les fonctions $y : x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $A \in \mathbb{R}^*$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le sous-espace propre associé est $E_\lambda(f) = Vect(x \mapsto e^{\lambda x})$.
  Les sous-espaces propres de f sont donc des droites (ils sont tous de dimension 1).

Voici donc un exemple d'endomorphisme qui possède une infinité de valeurs propres (mais ceci n'est possible qu'en dimension infinie...).

Proposition 7 (Indépendance linéaire des sous-espaces propres).
Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ (avec $p \geq 2$) des valeurs propres **distinctes** *de f. Alors :*

(*i*) *les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe, i.e. :*

$$\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f).$$

(*ii*) *si $x_1, \cdots, x_p$ sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, alors la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre* .

ATTENTION !

Bien sûr, on a $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f) \subset E$, mais **cette inclusion peut être stricte**.
En général, les sous-espaces propres de f ne sont donc pas supplémentaires dans E.

Preuve :

(*i*) Récurrence sur le nombre p de sous-espaces propres considérés.

- La propriété est vraie pour $p = 2$: en effet, si on considère deux valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors :

$x \in E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f) \Longrightarrow f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x \Longrightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} x = 0_2 \Longrightarrow x = 0_E.$

Donc $E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f) = \{0_E\}$, ce qui montre que

$$E_{\lambda_1}(f) + E_{\lambda_2}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f).$$

- Soit $p \geq 2$. On suppose que la propriété est vraie pour p sous-espaces propres. Montrons la pour $p+1$ sous-espaces propres : soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+1})$ $p+1$ valeurs propres distinctes de f. Montrons que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe. Pour cela, on suppose :

$$x_1 + \cdots + x_p + x_{p+1} = 0_E,$$

avec $\forall i \in \{1, \cdots, p+1\}$, $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$.
En appliquant f et en utilisant que $f(x_i) = \lambda_i x_i$ pour chaque i, on obtient par linéarité :

$$f(x_1) + \cdots + f(x_p) + f(x_{p+1}) = f(0_E),$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E.$$

Vu que $x_{p+1} = -(x_1 + \cdots + x_p)$, ceci se réécrit

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1}_{\in E_{\lambda_1}(f)} + \cdots + \underbrace{(\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p}_{\in E_{\lambda_p}(f)} = 0_E.$$

Par hypothèse, la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe, donc cette somme nulle entraîne :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \quad (\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i = 0_E,$$

donc (puisque $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$) : $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$.
Il s'ensuit $x_{p+1} = -(x_1 + \cdots + x_p) = 0_E$.
Ceci montre que la propriété est héréditaire.

(ii) Si $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0_E$ avec chaque $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et chaque x_i un vecteur propre associé à λ_i, alors en posant $y_i = \alpha_i x_i$ pour tout i, on a

$$y_1 + \cdots + y_p = 0_E,$$

avec chaque $y_i \in E_{\lambda_i}(f)$, donc puisque la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe d'après (i), on en déduit que $y_i = 0_E$, c'est-à-dire $\alpha_i x_i = 0_E$ pour tout i. Mais les x_i sont non nuls (vecteurs propres), donc on a $\alpha_i = 0$ pour tout i, ce qui montre que la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.

$\square$

2) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

En dimension finie, on dispose d'une caractérisation simple des valeurs propres, grâce au déterminant. Dans toute la suite, **on suppose que $\boldsymbol{E}$ est de dimension finie**, et on note $\boldsymbol{n} = \mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 8 (Caractérisation des valeurs propres à l'aide du det).
Si $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \det(\lambda Id_E - f) = 0 \; .$$

Preuve : On a vu que : λ valeur propre de $f \iff f - \lambda Id_E$ non injective.
Vu qu'ici E est de dimension finie, on a l'équivalence

$$f - \lambda Id_E \text{ non injective} \iff f - \lambda Id_E \text{ non bijective}$$

(en dimension finie, un endomorphisme est bijectif ssi il est injectif). Donc

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \det(f - \lambda Id_E) = 0$$

(rappelons qu'un endomorphisme est bijectif ssi son déterminant est non nul).
Enfin, on a $\det(\lambda Id_E - f) = (-1)^n \det(f - \lambda Id_E)$, ce qui montre l'équivalence voulue.
□

Le résultat suivant (difficile) sera admis :

Lemme 9 (Structure polynomiale de $\det(\boldsymbol{\lambda Id_E - f})$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \det(\lambda Id_E - f) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0.$$

En d'autres termes, $\det(\boldsymbol{\lambda Id_E - f})$ *est un polynôme de degré n en la variable λ, dont le coefficient dominant est* 1.

Remarque

Si on fixe une base $\mathcal{B}$ de E et qu'on considère $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors

$$\det(\lambda Id_E - f) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et les coefficients β_j de ce polynôme en λ sont des sommes et produits des $a_{i,j}$.

Exemple (Cas $n = 2$)
Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$\det(\lambda Id_E - f) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}).$$

Exemple (Cas $n = 3$)
Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$\det(\lambda Id_E - f) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & \lambda - a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, on obtient

$$\det(\lambda Id_E - f) = -a_{1,3} \begin{vmatrix} -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} \end{vmatrix} + a_{2,3} \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} \end{vmatrix} + (\lambda - a_{3,3}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Les deux premiers termes de cette expression sont clairement des polynômes de degré ≤ 1 en λ, donc il existe $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\det(\lambda Id_E - f) \;=\; (\lambda - a_{3,3}) \times (\lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})) + \gamma_1\lambda + \gamma_0.$$

Ceci se réécrit

$$\det(\lambda Id_E - f) = \lambda^3 - (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0, \quad \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{K}.$$

Définition 10 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de f** *le polynôme :*

$$\chi_f(X) = \det(XId_E - f) \in \mathbb{K}[X].$$

Notation
Le polynôme caractéristique se note $\chi_f(X)$ ou $P_f(X)$.

Remarque
On a $\deg(\chi_f) = n = \dim(E)$.

Proposition 11 (Interprétation des valeurs propres comme racines).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) *Les valeurs propres de f sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique :*

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \chi_f(\lambda) = 0.$$

(ii) *f possède au plus n valeurs propres.*

Preuve : D'après la proposition 8, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(\lambda Id_E - f) = 0$, c'est-à-dire $\chi_f(\lambda) = 0$.
Enfin, χ_f étant un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n, il possède au plus n racines dans $\mathbb{K}$.
Donc f possède au plus n valeurs propres.

$\square$

Définition 12 (Spectre d'un endomorphisme).
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, on appellera **spectre de f** *(noté $sp(f)$) l'ensemble des valeurs propres de f.*

Remarque

- Le spectre de f est une partie finie de $\mathbb{K}$, de cardinal inférieur ou égal à n.
- Le nombre de sous-espaces propres de f est donc limité par la dimension de E.
- $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$, il est possible que f ne possède **aucune valeur propre** (si par exemple $\chi_f(X) = X^2 + 1$, sans racine réelle).
- $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$, **$f$ possède toujours au moins une valeur propre**.
  En effet, son polynôme caractéristique est dans $\mathbb{C}[X]$, il possède donc au moins une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gaüss).

Exemple

Calcul des valeur propres et des sous-espaces propres de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$f(x,y,z) = (2x+4z, 3x-4y+12z, x-2y+5z).$$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de f vaut donc

$$\chi_f(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -4 \\ -3 & X+4 & -12 \\ -1 & 2 & X-5 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2).$$

Les valeurs propres de f sont donc les racines de ce polynôme :

$$sp(f) = \{0,1,2\}.$$

Il y a donc trois sous-espaces propres :

$$E_0(f) = Ker(f) = Vect\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_1(f) = Ker(f - Id) = Vect\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2(f) = Ker(f - 2Id) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Eléments propres d'une matrice carrée

Définition 13 (Valeur/vecteur propre d'une matrice carrée).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de *A*** *si*
λ est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad f(V) = AV.$$

Tout vecteur colonne V tel que $V \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $AV = \lambda V$ est alors appelé **vecteur propre** *de la matrice A associé à la valeur propre λ.*

Remarque

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } A \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\},\ AV = \lambda V \\ &\Longleftrightarrow \quad Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \quad \Longleftrightarrow \quad rg(A - \lambda I_n) < n \\ &\Longleftrightarrow \quad A - \lambda I_n \text{ non inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\lambda I_n - A) = 0 .\end{aligned}$$

Définition 14 (Sous-espaces propres d'une matrice carrée).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle **sous-espace propre de *A* associé à $\boldsymbol{\lambda}$** *le sous-espace vectoriel $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$.*

Remarque
Pour toute valeur propre λ de A, le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}^n$.

Définition 15 (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle* **polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$** *le polynôme :*

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X].$$

Remarque

- $\deg(\chi_A) = n$.
- D'après ce qui précède, **les valeurs propres d'une matrice $\boldsymbol{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ sont les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique**. Il y en a donc **au plus $\boldsymbol{n}$** (la taille de la matrice).
- On note $sp(A)$ (le "spectre" de A) l'ensemble des valeurs propres de A.

Proposition 16 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire).
Les valeurs propres d'une matrice **triangulaire** *sont* **ses éléments diagonaux** .
. . . .

Preuve : Si T est triangulaire supérieure, son polynôme caractéristique vaut alors :

$$\chi_T(X) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & X - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = (X - a_{1,1})(X - a_{2,2}) \cdots (X - a_{n,n}) \ .$$

On a donc $\chi_T(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{a_{1,1}, \cdots, a_{n,n}\}$. $\square$

Proposition 17 (Des matrices semblables ont même poly. caractéristique). *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.* **Si** *$A$ et B sont semblables,* **alors** $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{K}$. Par hypothèse, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Donc

$$xI_n - B = P^{-1}(xI_n)P - P^{-1}AP = P^{-1}(xI_n - A)P.$$

Il s'ensuit par multiplicativité du déterminant :

$$\det(xI_n - B) = \det(P^{-1}) \times \det(xI_n - A) \times \det(P) = \det(xI_n - A).$$

On a donc $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, ce qui montre que les polynômes χ_A et χ_B sont égaux.

$\square$

ATTENTION !

La réciproque est fausse !

Exemple

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont **pas** semblables (I n'est semblable qu'à elle-même), bien qu'ayant même polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = \chi_I(X) = (X-1)^2$.

Remarque

Deux matrices semblables ont donc les mêmes valeurs propres.

4) Multiplicité d'une valeur propre

Lorsque E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres de f sont donc les racines d'un polynôme de degré n (le polynôme caractéristique). On peut donc parler de leur multiplicité :

Définition 18 (Multiplicité d'une valeur propre).

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **multiplicité**

de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine de $\chi_f(X)$,

c'est-à-dire le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\lambda)^k$ divise $\chi_f(X)$.

Remarque
La multiplicité d'une valeur propre est évidemment comprise entre 1 et $n = deg(\chi_f)$.

Exemple
Si $\chi_f(X) = (X-3)^2(X+1)$, alors $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \text{ est valeur propre "double" (de multiplicité 2)} \\ \lambda_2 = -1 \text{ est valeur propre "simple" (de multiplicité 1)} \end{cases}$.

Rappel (Multiplicité et dérivées successives)
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in [\![1; \deg(P)]\!]$:

$$\lambda \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \iff \begin{cases} P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \\ P^{(m)}(\lambda) \neq 0 \end{cases}.$$

. . . .

Proposition 19 (Forme du polynôme caractéristique sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\boldsymbol{\chi_f}$ **est scindé**, *c'est-à-dire :*

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où $1 \leq p \leq n$, les $\lambda_k \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres distinctes de f, et les α_k sont des entiers ≥ 1 (les multiplicités respectives des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$).

Remarque
Avec les notations précédentes, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = deg(\chi_f) = n$.

Preuve : C'est une conséquence directe de la propriété suivante : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé (s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1).
Et cette propriété se démontre simplement par récurrence sur le degré du polynôme à partir du théorème de d'Alembert-Gaüss (voir cours de TSI 1). □

ATTENTION !
C'est faux en général sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$!

Remarque

- Bien noter qu'en général (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) le nombre de valeurs propres **distinctes** p est **inférieur ou égal à $n = \dim(E)$**.
- Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme possède n valeurs propres **pas forcément distinctes** (elles sont "comptées avec multiplicité").
- On prendra l'habitude de chercher la multiplicité des valeurs propres.

Exemple (Matrice de rotation)
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \notin \pi\mathbb{Z}.$$

On a $\chi_A(X) = (X-1)(X^2 - (2\cos\theta)X + 1)$, et le facteur de degré 2 est irréductible sur $\mathbb{R}$ (son discriminant est < 0).
Bien entendu, si on considère A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a χ_A scindé sur $\mathbb{C}$: en effet,

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta}).$$

La matrice A ne possède donc qu'une valeur propre réelle, et deux valeurs propres complexes conjuguées. De plus, les trois valeurs propres de A sont simples (de multiplicité 1).

On a un lien entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé :

Proposition 20 (Lien entre multiplicité de $\boldsymbol{\lambda}$ et dimension de $\boldsymbol{E_\lambda(f)}$).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$
. . . .
de multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq \alpha_\lambda$,
. . . .
où $E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E)$ est le sous-espace propre de f associé à λ .
. . . .

Remarque (Cas d'une valeur propre simple)
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre simple de f, **alors** on a $\dim(E_\lambda(f)) = 1$, c'est-à-dire que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

ATTENTION !
La remarque précédente n'admet **pas de réciproque** : il est possible que λ soit valeur propre de multiplicité ≥ 2, mais que $\dim(E_\lambda) = 1$.
De manière générale, on peut très bien avoir $\dim(E_\lambda) < \alpha_\lambda$.

Preuve :

- Puisque $E_\lambda(f)$ est un sev non nul de E (λ étant valeur propre), on a

$$\dim(E_\lambda(f)) \geq 1.$$

- Notons $d = \dim(E_\lambda(f)) \in [\![1, n]\!]$. On considère une base $(u_1, \cdots, u_d)$ de $E_\lambda(f)$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_d, u_{d+1}, \cdots, u_n)$ de E.
Puisque $f(u_i) = \lambda u_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$ (vu que $u_i \in E_\lambda(f)$), la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda I_d & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ (matrice "triangulaire par blocs"), avec $A_1 \in \mathcal{M}_{d,n-d}(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de f vaut donc

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} (X-\lambda)I_d & -A_1 \\ 0 & XI_{n-d} - A_2 \end{vmatrix}.$$

En développant successivement par rapport aux premières colonnes, on a donc

$$\chi_f(X) = (X - \lambda)^d \times \det(XI_{n-d} - A_2) = (X - \lambda)^d \times \chi_{A_2}(X),$$

ce qui montre que $(X - \lambda)^d$ divise le polynôme $\chi_f(X)$. La multiplicité de λ dans $\chi_f(X)$ est donc au moins égale à $d = \dim(E_\lambda(f))$ (il se peut que λ soit également racine du polynôme $\chi_{A_2}(X)$) : on a bien

$$\alpha_\lambda \geq \dim(E_\lambda).$$

$\square$

III Endomorphismes/matrices diagonalisables

Notons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Existe-t-il une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ?

- Si une telle base existe, alors en notant

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

  on a $f(e_i) = a_{i,i} e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire que les e_i (qui sont non nuls) sont des vecteurs propres de f .

- Réciproquement, si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f (pour des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non nécessairement distinctes), alors $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale car

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ceci motive la définition suivante :

1) Définition

Définition 21 (Endomorphisme diagonalisable).
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit **diagonalisable** *s'il*
. . . .
existe une base de E formée de vecteurs propres de f. Cela revient à dire qu'il
. . . .
existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
. . . .

Vocabulaire
Dans ce cas, "diagonaliser l'endomorphisme f" signifie trouver une telle base de vecteurs propres, appelée **base de diagonalisation** de f.

On définit naturellement une notion analogue sur les matrices carrées :

Définition 22 (Matrice diagonalisable).
Une **matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* **diagonalisable** *si elle est semblable à*
. . . .
une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que
. . . .
$P^{-1}AP$ soit diagonale .
. . . .

Vocabulaire
Dans ce cas, "diagonaliser" la matrice A, c'est donner explicitement une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

ATTENTION !
Toute matrice diagonale est diagonalisable, mais la réciproque est fausse ...

Remarque (Deux évidences)

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \text{l'endomorphisme } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array} \right. \text{ est diagonalisable.}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une quelconque base de E, alors

$$f \text{ diagonalisable} \iff Mat_{\mathcal{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

2) Exemple fondamental : projecteurs et symétries

Proposition 23 (Diagonalisabilité des projecteurs et symétries).
Les **projecteurs et les symétries** *de E sont des endomorphismes* **diagonalisables** *(où E est un quelconque $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie).*

Preuve :

- Si $p : E \to E$ est un projecteur, alors en considérant une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe :

$$E = Im(p) \oplus Ker(p) = Ker(p - Id_E) \oplus Ker(p),$$

on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $r = rg(p) = \dim(Im(p))$.

- Si $s : E \to E$ est une symétrie, alors en considérant une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe :
$$E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E),$$
on a
$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$
où $r = \dim(Ker(s - Id_E))$.

$\square$

3) Théorème de diagonalisation

De manière générale, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme (ou une matrice) soit diagonalisable.

Lemme 24 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) *f est diagonalisable.*

(ii) *Il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des* **valeurs propres distinctes** *de f telles que*

$$E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E.$$

Dans ce cas, *on a $sp(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ et*

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^{\dim(E_{\lambda_1}(f))} \cdots (X - \lambda_p)^{\dim(E_{\lambda_p}(f))}.$$

En bref, un endomorphisme est **diagonalisable** si et seulement si **ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans *E***.

Preuve :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres. Ces vecteurs propres sont associés à un certain nombre de valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ (où $p \in [\![1; n]\!]$). Montrons alors que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \cdots, E_{\lambda_p}(f)$ sont supplémentaires dans E :

- On sait déjà (cf. prop 7) que ces sous-espaces propres sont en somme directe :

$$E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_p}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) \subset E.$$

- Chaque e_i appartient à un des $E_{\lambda_k}(f)$, donc à fortiori $e_i \in E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est donc une famille libre du sous-espace $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$, ce qui entraîne que $\dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)) \geq Card(\mathcal{B}) = n = \dim(E)$, et donc

$$E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par hypothèse, on a

$$E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E,$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes.
Considérons $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe :

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{e_1, \cdots, e_{i_1}}_{\text{base de } E_{\lambda_1}(f)}, \underbrace{e_{i_1+1}, \cdots, e_{i_2}}_{\text{base de } E_{\lambda_2}(f)}, \cdots, \underbrace{e_{i_{p-1}+1}, \cdots, e_n}_{\text{base de } E_{\lambda_p}(f)} \right),$$

avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{p-1} < n$.

Vu que $f(e_i) = \begin{cases} \lambda_1 e_i & \text{si } 1 \leq i \leq i_1 \\ \lambda_2 e_i & \text{si } i_1 + 1 \leq i \leq i_2 \\ \vdots & \\ \lambda_p e_i & \text{si } i_{p-1} + 1 \leq i \leq n \end{cases}$, on en déduit que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \lambda_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \lambda_p & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & \lambda_p \end{array}\right)$$

(où chaque λ_k apparaît $\dim(E_{\lambda_k}(f))$ fois), ce qui montre que f est diagonalisable.

On remarque au passage que le polynôme caractéristique de f vaut

$$\chi_f(X) = \det(XI_n - Mat_{\mathcal{B}}(f)) = (X - \lambda_1)^{\dim(E_{\lambda_1}(f))} \cdots (X - \lambda_p)^{\dim(E_{\lambda_p}(f))},$$

donc les valeurs propres de f sont bien $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ (les racines), il n'y en a pas d'autres.

$\square$

Remarque
Dans la preuve précédente, remarquer la structure "par blocs" de la matrice obtenue dans la base de diagonalisation :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} = Mat(f_{|E_{\lambda_k}(f)}).$$

Cette structure rappelle que chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(f)$ est stable par f.

A retenir : **si $\boldsymbol{f}$ est diagonalisable**, alors n'importe quelle matrice diagonale D qui représente f (on dit que D est une "réduite" de f) vérifie les propriétés suivantes :

- les coefficients diagonaux de D sont exactement les valeurs propres de f.
- chaque valeur propre est représentée sur la diagonale de D autant de fois que son ordre de multiplicité.

Il y a donc unicité de la "réduite" D à l'ordre des éléments près. En revanche, il n'y a pas unicité de la base de diagonalisation (même pas à l'ordre des vecteurs près).

On déduit du lemme précédent le théorème suivant :

Théorème 25 (Théorème de diagonalisation).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On note $\chi_f(X) = \det(XId_E - f)$ son polynôme caractéristique.

(i) **Si $\boldsymbol{\chi_f}$ n'est pas scindé sur** $\mathbb{K}$, *alors f n'est pas diagonalisable* .

(ii) **Si $\boldsymbol{\chi_f}$ est scindé sur** $\mathbb{K}$, *alors en notant $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, on a*

$$
\begin{aligned}
f \text{ est diagonalisable} \quad &\Longleftrightarrow \quad E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall k \in [\![1; p]\!],\ \dim(E_{\lambda_k}(f)) = \alpha_k
\end{aligned}
$$
.

Remarque
Interprétation du théorème : les endomorphismes diagonalisables sont ceux qui ont des **sous-espaces propres de dimension maximale** (égale à la multiplicité des valeurs propres). Ainsi, on dispose de "suffisamment de vecteurs propres libres" pour construire une base de E qui diagonalise f.

Preuve :

(*i*) Le lemme précédent montre que si f est diagonalisable, alors le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{K}$ (c'est un produit de polynômes de degré 1). Par contraposée, on obtient le point (i).

(*ii*) Le lemme précédent montre que

$$f \text{ diagonalisable} \iff E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E.$$

Vu qu'on a toujours $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) \subset E$, on en déduit que

$$f \text{ diagonalisable} \iff \dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)) = \dim(E),$$

c'est-à-dire

$$f \text{ diagonalisable} \iff \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}(f)) = n.$$

Mais on a aussi $n = \deg(\chi_f) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$, donc

$$f \text{ diagonalisable} \iff (\alpha_1 - \dim(E_{\lambda_1}(f))) + \cdots + (\alpha_p - \dim(E_{\lambda_p}(f))) = 0.$$

Puisque tous les termes $\alpha_k - \dim(E_{\lambda_k}(f))$ sont positifs (d'après la proposition 20), on en déduit que cette somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul. D'où :

$$f \text{ diagonalisable} \iff \forall k \in \{1, \cdots, p\},\ \alpha_k - \dim(E_{\lambda_k}(f)) = 0.$$

$\square$

Remarque

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition "χ_f est scindé" est automatique.
- Même si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) a toutes ses valeurs propres réelles, il n'est pas nécessairement diagonalisable !

Exemple

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (y + z, -x + 2y + z, -x + y + 2z).$$

1. Montrer que f est diagonalisable et le diagonaliser.
2. Diagonaliser la matrice A canoniquement associée à f.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\chi_f(X) = \chi_A(X) = (X - 1)^2(X - 2)$, donc f possède une valeur propre double (1) et une valeur propre simple (2).

- Le sous-espace propre $E_2(f)$ est nécessairement de dimension 1, puisque la valeur propre 2 est simple. On a $E_2(f) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(f)) = 2$ (puisque la valeur propre 1 est de multiplicité 2). C'est le cas car $E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Les calculs précédents montrent que la famille (u_1, u_2, u_3) obtenue est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f. L'endomorphisme f est donc diagonalisable et sa matrice dans la base (u_1, u_2, u_3) est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Tout ceci montre aussi que la matrice A est diagonalisable, puisque $D = P^{-1}AP$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3)).

Remarque
Si $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale et P inversible :

- **les colonnes de la matrice $\boldsymbol{P}$** forment une **base de diagonalisation** de l'endomorphisme canoniquement associé à A, noté $f : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases}$
  Cette matrice P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$.
- D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Elle est diagonale, et ses **éléments diagonaux** sont les **valeurs propres** de A.

Exemple

Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + P'$ n'est pas diagonalisable.

La matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\chi_f(X) = (X-1)^3$: f possède une valeur propre triple : 1.

Si f était diagonalisable, on aurait alors A semblable à $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A = P^{-1} I_3 P$ avec P inversible, c'est-à-dire $A = I_3$, ce qui est faux.

Donc f n'est pas diagonalisable.

4) Cas où χ_f est scindé à racines simples

Signalons un cas particulier intéressant :

Proposition 26 (Cas où χ_f est scindé à racines simples).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
. . . .
Si *χ_f est* **scindé à racines simples** *sur $\mathbb{K}$,* **alors** *f est diagonalisable.*
. . . .

Remarque
Cela revient à dire que **si** f possède n valeurs propres distinctes (avec $n = \dim(E)$), **alors** f est diagonalisable.
Et en conséquence immédiate : **si** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, **alors** A est diagonalisable.

Preuve : Dans ce cas, f possède n sous-espaces propres, qui sont des droites ($\forall k \in [\![1, n]\!]$, $1 \leq \dim(E_{\lambda_k}(f)) \leq \alpha_k = 1$). On a donc bien $\sum_{k=1}^{n} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n$, ce qui prouve que f est diagonalisable.

$\square$

ATTENTION !

La réciproque est fausse !

Par exemple, Id_E est diagonalisable et pourtant, cet endomorphisme ne possède qu'une valeur propre (1) de multiplicité n (on a $\chi_{Id_E}(X) = (X-1)^n$).

Exemple (Extrait de CCP TSI 2012)

Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$f(P) = (X+2)P(X) - XP(X+1)$$

est diagonalisable.

Sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc $sp(f) = sp(A) = \{-1, 0, 1, 2\}$ (puisque la matrice est triangulaire).

Vu que l'endomorphisme f possède 4 valeurs propres distinctes (et $\dim(E) = 4$), on en déduit que f est diagonalisable, et que la matrice A est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mais aussi à toute matrice diagonale dont la diagonale est une permutation du quadruplet $(2, 1, 0, -1)$ (il y a donc $4! = 24$ réduites possibles).

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

On montre que le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$$

- Ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
- Ce polynôme est scindé **à racines simples** sur $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$: en effet, A possède 4 valeurs propres distintes, donc les sous-espaces propres sont quatre droites de $\mathbb{C}^4$ (en somme directe).
  Elles sont donc supplémentaires : $E_1(A) \oplus E_{-1}(A) \oplus E_i(A) \oplus E_{-i}(A) = \mathbb{C}^4$.

ATTENTION !
Dans l'exemple précédent, remarquons que la matrice A est **équivalente en lignes à** I_4, mais **pas semblable à** I_4 !

La matrice A est semblable (dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$) à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$