

Chapitre 1

Séries numériques

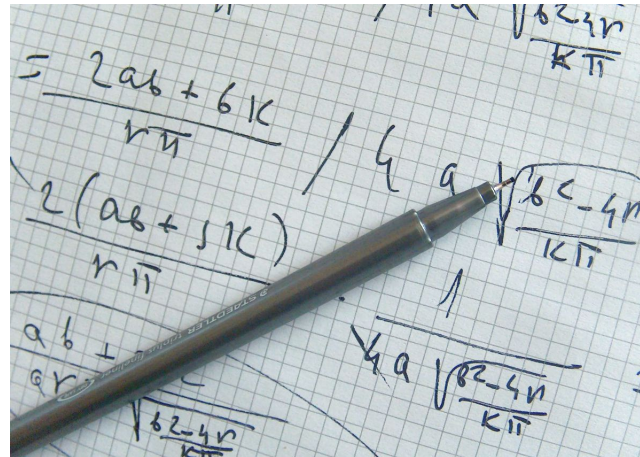


Table des matières

I Définitions et premiers exemples	1
1) Séries, sommes partielles	1
2) Convergence, divergence des séries	3
3) Trois exemples de référence	8
II Généralités sur la convergence des séries	20
1) Condition nécessaire de convergence	20
2) Opérations algébriques	22
3) Télésopage et liaison suite-série	25
III Séries réelles à termes positifs	29
1) Lien avec la monotonie	29
2) Critères de comparaison/des équivalents	33
3) Critère de d'Alembert	39
4) Deux exemples intéressants	43
IV Séries à termes réels ou complexes	45
1) Convergence absolue	45
2) Exemples de séries semi-convergentes	49
V Développement décimal d'un nombre réel	54
1) Nombres décimaux	54

2) Développement décimal / approximations décimales	56
3) Caractérisation des nombres décimaux/rationnels	62

I Définitions et premiers exemples

1) Séries, sommes partielles

Définition 1 (Série).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle ou complexe, *on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

.....
 Pour chaque entier n , la quantité S_n est appelée *somme partielle de rang n*

Remarque (Définition à partir d'un certain rang)

Si (u_n) est une suite définie seulement **à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$** , on peut quand même définir la série de terme général u_n : c'est la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

.....
 De toute façon, le rang à partir duquel la suite (u_n) est définie n'a pas d'importance, puisqu'on peut toujours la prolonger à \mathbb{N} en posant $u_0 = u_1 = \cdots = u_{n_0-1} = 0$ (ça ne change pas les sommes partielles).

Exemple

La suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (définie pour $n \geq 1$) est appelée **série harmonique** .

Ses premiers termes valent :

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = S_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad \dots$$

Remarque (Relation de récurrence)

Pour toute série, on a $\forall n \geq n_0, S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, et donc on peut exprimer les termes de la suite (u_n) en fonction de ceux de la suite (S_n) :

$$\begin{cases} u_{n_0} = S_{n_0} \\ \forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

En effet :

$$S_{n+1} = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \underbrace{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n}_{=S_n} + u_{n+1}.$$

2) Convergence, divergence des séries

Définition 2 (Convergence/divergence d'une série).

On dit que la série de terme général u_n est **convergente** si la suite des

sommes partielles (S_n) est convergente, c'est-à-dire si il existe $S \in \mathbb{C}$

tel que $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$. Le nombre S est alors appelé **somme de la série** et

on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (l'indice k est muet).

Dans le cas contraire (si la suite (S_n) diverge), on dit que la série est **divergente**.

ATTENTION !

Ne pas confondre :

- la convergence de la suite (u_n) (existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$)
- la convergence de la série de terme général u_n (existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$).

Notation

Souvent, on désignera par $\sum_{\dots\dots\dots} u_n$ ou par $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série de terme général

(u_n) . La notation sans l'indice de départ n_0 illustre bien le fait que **la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes**.

Remarque

En cas de convergence d'une série, le nombre S représente donc une "somme infinie" : c'est la limite de sommes qui comportent de plus en plus de termes.

Exemple

Les séries $\sum k$, $\sum 1$ et $\sum (-1)^k$ sont **divergentes** .

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la suite (S_n) est divergente.
- $T_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la suite (T_n) est divergente.

- $V_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, donc la suite (V_n) est divergente (les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont constantes et différentes, donc elles convergent vers deux limites différentes).

ATTENTION !

Une série peut diverger **sans que** la suite (S_n) des sommes partielles tende vers $\pm\infty$!
(par exemple $\sum (-1)^k$)

Exemple (Une série géométrique)

La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge, et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{1000}} + \cdots = 1.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Illustration : étant donné un gâteau, si on mange une moitié, puis un quart, puis un huitième, et qu'on fait ça indéfiniment (!), alors on "finira" par manger tout le gâteau.



Définition 3 (Reste d'une série convergente).

Si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Cette quantité s'appelle le **reste d'ordre n** .

Remarque

- En cas de convergence d'une série, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, puisque $R_n = S - S_n$ (en notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$).
- En cas de **divergence**, le **reste n'existe pas!**

Exemple

Le reste d'ordre n de la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (qui est bien convergente) est :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

3) Trois exemples de référence

Proposition 4 (Séries arithmétiques).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}^*$ ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$).

Alors, la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Preuve : Les sommes partielles se calculent facilement : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_0 + kr) = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{rn^2}{2},$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n| = +\infty$, ce qui montre que la suite (S_n) est divergente, puisque non bornée (**attention, r peut être un nombre complexe!**). \square

Remarque (Cas des séries constantes)

Dans l'exemple précédent, si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante, et donc évidemment, la série $\sum u_n$ diverge. En effet, les sommes partielles $c + c + \dots + c = nc$ tendent vers $+\infty$ en module lorsque $n \rightarrow +\infty$, sauf si $c = 0$ (la série nulle converge).

Le deuxième exemple de référence est le cas des "séries géométriques", c'est-à-dire les séries de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$.

Rappelons d'abord les résultats connus sur les **suites** géométriques :

Proposition 5 (Convergence des suites géométriques).

Soit $q \in \mathbb{C}$.

(i) $|q| > 1$, alors (q^n) diverge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = +\infty$
 (donc la suite est non bornée).

(ii) $|q| < 1$, alors (q^n) converge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

(iii) $|q| = 1$, alors $\begin{cases} \text{si } q = 1, (q^n) \text{ converge (elle est constante)} ; \\ \text{si } q \neq 1, (q^n) \text{ diverge (en restant bornée)} . \end{cases}$

Preuve : Attention! la suite géométrique étudiée étant a priori complexe, il faut travailler en module.

(i) Pour le cas $|q| > 1$, on écrit $|q| = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, puis

$$|q^n| = |q|^n = (1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq n\varepsilon$$

(tous les termes étant positifs, on peut minorer la somme par le terme d'indice $k = 1$). Cette inégalité montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = +\infty$.

- (ii) Pour le cas $|q| < 1$ (et q non nul), on a $\left| \frac{1}{q} \right| = \frac{1}{|q|} > 1$, donc par le point précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{1}{q} \right)^n \right| = +\infty$, ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0$, puisque $|q^n| = \frac{1}{\left| \left(\frac{1}{q} \right)^n \right|}$. Le cas $q = 0$ est quant à lui trivial.

(iii) Si $|q| = 1$:

- le cas $q = 1$ est trivial.
- si $|q| \neq 1$, alors q s'écrit $q = e^{ix}$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q^n = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

On sait alors (voir les exercices de l'annexe 1) que la suite des parties réelles $(\cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Cela implique que la suite complexe (q^n) ne converge pas. Enfin, il est clair que (q^n) est bornée puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |q^n| = |q|^n = 1.$$

□

Etablissons maintenant le résultat qui nous intéresse (pour les **séries**) :

Proposition 6 (Convergence des séries géométriques).

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

.....
 Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Preuve : On a $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$. Cette quantité n'admet donc une limite finie que si $|q| < 1$ (d'après la proposition précédente), et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n_0}}{1-q} \quad (n_0 \geq 1).$$

□

ATTENTION !

Si $q = 1$, la suite (q^n) converge, alors que la série $\sum q^n$ diverge !

Enfin, voici le troisième exemple de référence :

Proposition 7 (Séries de Riemann).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

.....

Exemple

La série $\sum \frac{1}{n}$ (appelée "série harmonique") diverge.

La série $\sum \frac{1}{n^{1,1}}$ converge. La série $\sum \frac{1}{n^{0,9}}$ diverge.

Idées de la démonstration

- Majorer et minorer les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$:

→ technique de **comparaison série/intégrale**, avec la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

- Utiliser la **croissance de la suite** (S_n) : il suffira de montrer que (S_n) est **majorée** pour montrer qu'elle est convergente.

Preuve : Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout entier $n \geq 1$.

- Cas où $\alpha \leq 0$:

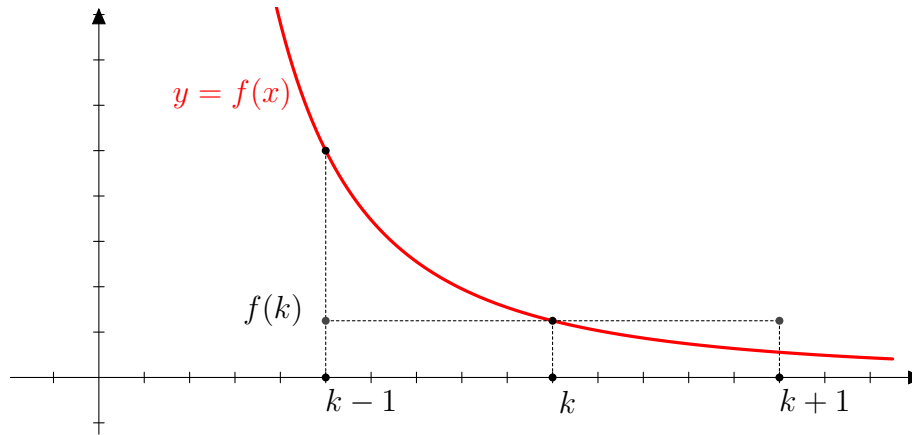
C'est trivial car dans ce cas, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^\alpha} \geq 1$, donc on a

$$S_n \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

ce qui montre que $S_n \rightarrow +\infty$, et donc que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

- Cas où $\alpha > 0$: On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$, donc impossible de minorer "simplement" le terme général $\frac{1}{k^\alpha}$.

Idée : on étudie l'aire sous la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ (définie et décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$).



La décroissance de la fonction f amène l'inégalité des aires :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx.$$

Pour le montrer rigoureusement : $\forall x \in [k-1; k]$, $f(x) \geq f(k)$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^k f(x)dx \geq \int_{k-1}^k f(k)dx = f(k) \times 1 = f(k).$$

De même, $\forall x \in [k; k+1]$, $f(x) \leq f(k)$, donc

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k).$$

On somme ensuite l'encadrement pour k allant de 2 à n :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx,$$

(en utilisant la relation de Chasles), c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \int_2^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n f(x)dx.$$

Avantage : on sait calculer ces intégrales, alors qu'on ne sait pas calculer S_n .

$$\int f(x)dx = \int x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Des distinctions de cas apparaissent alors :

- $\boxed{\text{Si } \alpha = 1}$, alors

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$

La minoration montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge dans ce cas.

- $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 1}$, alors

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

On peut alors conclure en fonction du signe de l'exposant $1 - \alpha$:

- * $\boxed{\text{Si } 0 < \alpha < 1}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, ce qui montre que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge dans ce cas.

- * $\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$, alors on a $0 < n^{1-\alpha} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$S_n \leq 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

ce qui montre que la suite (S_n) est majorée. Or, cette suite est également croissante, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$, donc elle converge.

Ceci prouve que dans ce cas, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

□

Remarque

Dans l'exemple des séries de Riemann, on a donc prouvé l'existence de la somme infinie

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour les réels $\alpha > 1$, mais **on ne connaît pas *a priori* sa valeur.**

On pourra montrer (par de multiples méthodes, notamment en utilisant les séries de Fourier), qu'on a, pour $\alpha = 2$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

Ceci illustre bien le fait qu'une suite de nombres rationnels peut converger vers un irrationnel : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \in \mathbb{Q},$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}.$$

II Généralités sur la convergence des séries

1) Condition nécessaire de convergence

Comme nous l'avons vu dans les exemples fondamentaux précédents, le principal problème des séries est qu'en général, **on ne sait pas expliciter les sommes partielles** S_n (voir les séries de Riemann), hormis les cas des séries arithmétiques et géométriques. Donc, il est nécessaire de développer une théorie pour l'étude de la convergence des séries.

Proposition 8 (Condition nécessaire de convergence d'une série).

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

.....

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. □

ATTENTION !

La réciproque est fautive ! On peut avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\sum u_n$ qui diverge.

Par exemple, la "série harmonique" $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Définition 9 (Divergence grossière).

On dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente

si son terme général u_n ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarque

D'après la proposition précédente, une série grossièrement divergente est divergente.

Exemple

- La série $\sum_{n \geq 0} 2^n$ est grossièrement divergente, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \neq 0$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{10n+8}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ aussi, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{10n+8} = \frac{1}{10}$ et $(-1)^n$ n'a pas de limite
- La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

Méthode

Pour étudier la convergence d'une série, on peut donc faire le **test** rapide suivant : **le terme général u_n tend-il vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$?**

Si non, la série est trivialement divergente (d'où l'appellation "divergence grossière").

Mais dans la plupart des cas, on aura $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui ne dit rien sur la convergence de la série ...

2) Opérations algébriques

Comme pour les suites, on dispose d'opérations algébriques sur les séries :

Proposition 10 (Opérations algébriques).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors

la série $\sum (u_n + v_n)$ converge, et on a, pour tout entier n_0 :

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k.$$

(ii) Si $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum (\lambda u_n)$ converge, et on a,

pour tout entier n_0 :

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k.$$

(iii) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Preuve : On raisonne avec les suites $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=n_0}^n v_k$.

Si $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$ et $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T$ alors on sait bien que $S_n + T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S + T$ et $\lambda S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda S$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Enfin, si $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$ et si (T_n) diverge, alors la suite somme $(S_n + T_n)$ diverge, sinon on aurait $S_n + T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} W \in \mathbb{C}$, et donc $T_n = (S_n + T_n) - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} W - S$, ce qui est faux, puisque (T_n) diverge.

□

Remarque

On a donc le fait suivant : toute combinaison linéaire (réelle ou complexe) de séries convergentes donne une série convergente, et on a dans ce cas la formule

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

ATTENTION !

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **toutes les deux divergentes**, alors on peut avoir $\sum(u_n + v_n)$ **convergente ou divergente**.

Exemple

Si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, on a $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (grossièrement) divergentes , et

$$\sum(u_n + u_n) = \sum 2(-1)^n \text{ diverge, et } \sum(u_n + v_n) = \sum 0 \text{ converge.}$$

ATTENTION !

Il n'y a **pas de règle simple avec le produit**. En effet, il n'y a *a priori* aucun lien entre la convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et celle de $\sum u_n v_n$. Et bien sûr, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k v_k) \neq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right),$$

même en cas de convergence des trois séries !

Exemple

Si $u_n = v_n = \frac{1}{n}$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent (série de Riemann avec $\alpha = 1$).

Pourtant, $\sum u_n v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3) Télécopage et liaison suite-série

Le "télécopage" est un procédé de simplification de proche en proche de certaines sommes.

Lemme 11 (Télécopage).

Soient deux entiers naturels $n_0 \leq n$, et (u_k) une suite réelle ou complexe. On a alors

$$\sum_{k=n_0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_{n_0} \quad .$$

.....

Preuve : La formule est évidente si $n = n_0$. Supposons donc $n \geq n_0 + 1$. On sépare la somme en deux et on effectue un changement d'indice dans la première :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=n_0}^n u_{k+1} - \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n_0+1}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^n u_k \\ &= \left(u_{n+1} + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right) - \left(u_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right) = u_{n+1} - u_{n_0}. \end{aligned}$$

□

Remarque

Cette technique sert parfois à **calculer certaines sommes** en réécrivant le terme général sous la forme $v_k = u_{k+1} - u_k$.

Exemple (Très classique)

On considère la série $\sum \frac{1}{k(k+1)}$. Montrons qu'elle converge et calculons sa somme.

On peut décomposer le terme général en "éléments simples" : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} = \frac{(a+b)X + a}{X(X+1)}.$$

Un calcul simple montre que $a = 1$ et $b = -1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(par télescopage).

Cette identité prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Corollaire 12 (Liaison suite-série).

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. Alors, on a l'équivalence :

la suite (u_n) converge \iff la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge .

.....

ATTENTION !

L'énoncé précédent **ne dit pas** que

"la suite (u_n) converge ssi la série $\sum u_n$ converge" ! (complètement faux).

Il s'agit ici de la **série télescopique** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et pas de $\sum u_n$.

Preuve : Notons $T_n = \sum_{k=n_0}^n (u_{k+1} - u_k)$ la somme partielle de rang n (pour $n \geq n_0$)

de la série $\sum(u_{p+1} - u_p)$. On va montrer que la suite (T_n) converge ssi la suite (u_n) converge. Par le lemme précédent, on a

$$T_n = u_{n+1} - u_{n_0},$$

donc (puisque u_{n_0} est une constante indépendante de n), la suite (T_n) possède une limite ssi la suite (u_{n+1}) en possède une, ce qui revient à dire que (u_n) converge.

□

III Séries réelles à termes positifs

1) Lien avec la monotonie

Pour étudier la convergence des séries **à termes positifs** (i.e. $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang), on dispose de critères spécifiques, basés sur l'idée suivante :

Proposition 13 (Croissance des sommes partielles).

Si la suite réelle (u_n) est **positive** à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors la suite des sommes partielles (S_n) est **croissante** à partir du rang n_0 .

.....

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1}$, et cette quantité est positive pour $n \geq n_0 - 1$. D'où $S_{n+1} \geq S_n$ pour tout $n \geq n_0$. \square

Corollaire 14 (Caractérisation des séries positives convergentes).

Si la suite réelle (u_n) est **positive** à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \text{la suite } (S_n) \text{ est majorée}$$

(*"une série à termes positifs converge ssi ses sommes partielles sont majorées"*).

Preuve : Par la proposition précédente, la suite (S_n) est croissante à partir du rang n_0 . Donc, il y a deux possibilités :

- Soit (S_n) est majorée et dans ce cas, (S_n) converge vers un réel S , c'est-à-dire que la série converge.
- Soit (S_n) n'est pas majorée, et on a alors $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.

□

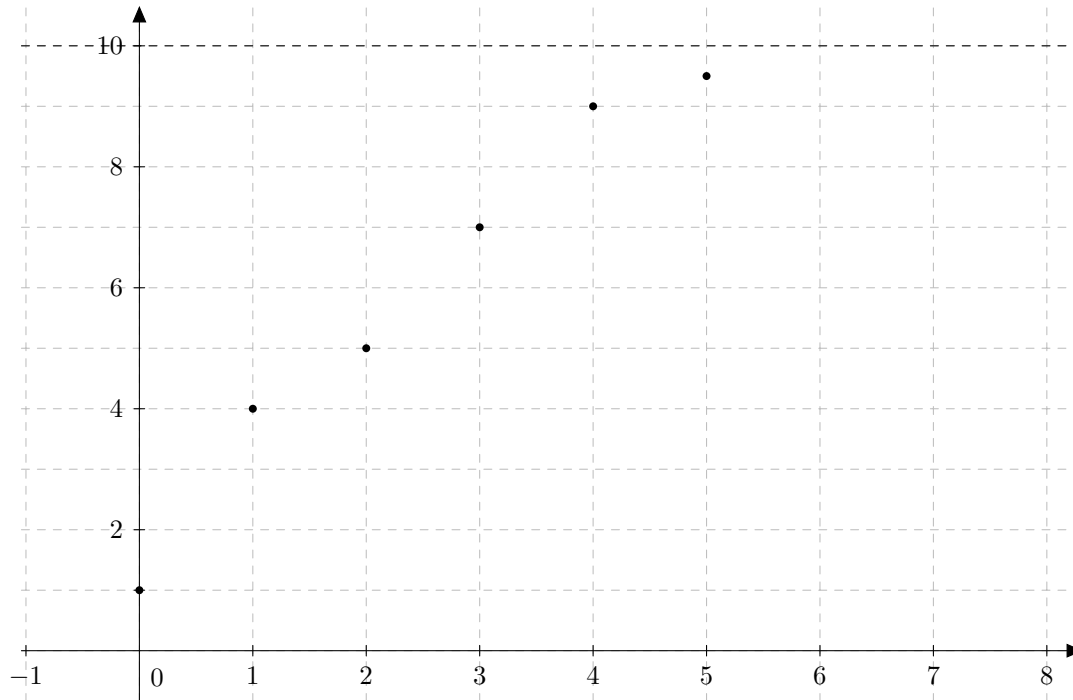
Remarque

Le corollaire se reformule de la façon suivante : pour une suite (u_n) **positive**, on a

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \text{il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_0 + \dots + u_n \leq M,$$

(dans cette inégalité, la constante **M** ne dépend pas de **n** bien entendu ...).

Dessin des sommes partielles croissantes et majorées :



Remarque (Cas des termes négatifs)

Le cas des **séries négatives** ($\sum u_n$ avec $u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang) est analogue : la suite (S_n) est **décroissante** dans ce cas, et la convergence de la série équivaut à (S_n) **minorée**. Tous les énoncés spécifiques aux séries positives s'adapteront donc sans problème aux séries négatives. Les cas embêtants sont donc :

- les séries de terme général u_n de signe non constant ;
- les séries de terme général u_n complexe.

ATTENTION !

L'équivalence du corollaire 14 est **fausse si on ne suppose pas u_n positive**.

Par exemple, en posant $u_n = (-1)^n$:

on a $\sum u_n$ divergente, et pourtant, les sommes partielles S_n sont quand même majorées, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n \leq 1.$$

2) Critères de comparaison/des équivalents

Proposition 15 (Critère de comparaison pour les séries à termes positifs).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui vérifient

$$0 \leq u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang } n_0 \in \mathbb{N} .$$

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et on a

$$0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n .$$

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge .

Preuve : On raisonne avec les sommes partielles $S_n := \sum_{k=n_0}^n u_k$ et $T_n := \sum_{k=n_0}^n v_k$.

Les suites $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(T_n)_{n \geq n_0}$ sont croissantes (puisque u_n et v_n sont positifs pour $n \geq n_0$), et on a, en sommant les inégalités $u_k \leq v_k$:

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k,$$

c'est-à-dire $S_n \leq T_n$.

Dès lors :

- (i) Si $\sum v_n$ converge, alors, par définition, $(T_n)_{n \geq n_0}$ converge (en croissant) vers un réel T (qui est donc sa borne supérieure), et on a

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n \leq T_n \leq T.$$

Du coup, la suite (S_n) est majorée (par T) et vu qu'elle aussi est croissante, elle converge vers un réel S , c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge.

Enfin, en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité :

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k,$$

(on peut car on a montré que les deux limites existent), on obtient l'inégalité voulue :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

- (ii) C'est directement la contraposée du point précédent : si jamais $\sum v_n$ divergeait, alors par le point (i), on aurait $\sum u_n$ qui converge, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\sum v_n$ diverge.

□

ATTENTION !

L'hypothèse de **positivité** est essentielle!

Exemple

Etude de la convergence de la série $\sum \frac{e^{-n}}{n^2}$.

On a $0 \leq \frac{e^{-n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Vu que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum \frac{e^{-n}}{n^2}$ converge.

Corollaire 16 (Critère des équivalents).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives** (ou négatives) à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

Rappel

• $u_n = o(v_n)$ signifie $u_n = \varepsilon_n v_n$, avec $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ si (v_n) ne s'annule pas).

• $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ signifie $u_n = a_n v_n$ avec $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ si (v_n) ne s'annule pas).

Preuve : Puisque les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, il existe une suite (a_n) définie à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = a_n v_n, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

Par définition de la limite, on a alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 \geq N, \quad n \geq n_1 \implies |a_n - 1| \leq \varepsilon \implies 1 - \varepsilon \leq a_n \leq 1 + \varepsilon.$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a donc $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$ à partir d'un certain rang n_1 .

Vu que les suites u_n et v_n sont positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a donc (en multipliant l'inégalité par v_n) :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \implies 0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs (appliqué deux fois), on peut en conclure que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge},$$

puisque les constantes $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ne changent pas la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum v_n$.

En effet :

- Si $\sum u_n$ converge, alors l'inégalité $0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n$ montre que $\sum \frac{1}{2}v_n$ converge, et donc $\sum v_n$ converge.
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3}{2}v_n$ converge aussi, et l'inégalité $0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$ montre que $\sum u_n$ converge.

□

Remarque

En pratique, **il suffit seulement de vérifier qu'une des deux suites équivalentes** (la plus simple!) **est de signe constant strict**, cela donnera automatiquement le même signe pour l'autre. Il est donc parfois intéressant de chercher d'abord un équivalent simple de u_n pour connaître le signe de u_n pour n suffisamment grand.

ATTENTION !

Le critère des équivalents est **faux si on n'a pas une hypothèse de signe constant** (ou si une des deux suites est complexe).

Exemple

Etude de la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

On a $\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ (à partir du rang $n = 1$), donc d'après le critère des équivalents, $\sum \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ est de même nature que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1/2$). Donc $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ est divergente.

Exemple

On peut étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ par plusieurs méthodes :

1) en utilisant le critère de comparaison, puisque $0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq 1.$

2) en utilisant le critère des équivalents, puisque $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$

3) par télescopage (déjà fait!).

3) Critère de d'Alembert

Proposition 17 (Critère de d'Alembert).

Soit (u_n) une suite **strictement positive** à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

.....
 (i) **Si $0 \leq \ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge** .

.....
 (ii) **Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement** .

Idées de la démonstration

- **Comparer** la suite (u_n) à une suite **géométrique** (q^n) (en encadrant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
- Utiliser le critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Preuve : Dans chaque cas, puisque $\ell \neq 1$, il y a "de la place" entre 1 et ℓ (même petite), et donc à partir d'un certain rang, les "quotients de d'Alembert" $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vont se retrouver strictement d'un côté ou de l'autre de 1.

- (i) Si $0 \leq \ell < 1$, alors on peut écrire $\ell = 1 - \alpha$ avec $1 \geq \alpha > 0$ (la distance qui sépare ℓ de 1). Puisque par hypothèse on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \alpha$, on a alors, à partir d'un certain rang $n_1 \geq n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

En multipliant par u_n (qui est strictement positif) :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad u_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) u_n.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq n_1, \quad u_n \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_1} u_{n_1},$$

et la suite $v_n := \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_1} u_{n_1}$ est bien géométrique de raison $q := 1 - \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[$, d'où la conclusion par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs : puisque $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors on peut écrire $\ell = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$, et similairement, on aura

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2, \quad u_n \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_2} u_{n_2},$$

et la suite $w_n := \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_2} u_{n_2}$ est bien géométrique de raison $q := 1 + \frac{\alpha}{2} \in]1, +\infty[$.

Le cas où $\ell = +\infty$ de traite de même, car on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$ à partir d'un certain rang n_3 , donc $u_n \geq 2^{n-n_3} u_{n_3}$ par récurrence.

□

Exemple

Etude de la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$

On utilise le critère de d'Alembert : en posant $u_n := \frac{1}{n!}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ et } 0 < 1, \text{ donc } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \text{ converge.}$$

ATTENTION !

Dans le cas où " $\ell = 1$ " (i.e. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$), alors on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$.

Exemple

Les séries de Riemann $\left(\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{1}{n^\alpha} \right)$:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (indépendamment de α), et pourtant, on sait bien que la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dépend de la valeur de α .

ATTENTION !

L'hypothèse $u_n > 0$ est nécessaire (la positivité doit être stricte).

Si on a seulement $u_n \geq 0$ (par exemple dans le cas où un terme sur deux est nul), alors on ne peut pas utiliser le critère de d'Alembert, puisque les quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas toujours définis.

4) Deux exemples intéressants

Exemple

Étude de la convergence de la série $\sum u_n$, où $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

On travaille sur les sommes partielles : posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{2n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n} + u_{2n+1} = 0 + \frac{1}{1} + 0 + \frac{1}{3} + \cdots + 0 + \frac{1}{2n+1},$$

donc

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}.$$

Or, $\frac{1}{2k+1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$ et la série $\sum \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k}$ diverge, donc par le critère des équivalents, on en déduit que la série positive $\sum \frac{1}{2k+1}$ diverge. On en conclut que la suite (S_n) diverge, sinon sa sous-suite (S_{2n+1}) serait convergente. Donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple

Etude de la convergence de $\sum_{n \geq 0} n^4 e^{-n^2}$.

Posons $u_n = n^4 e^{-n^2}$. Pour n suffisamment grand, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

En effet, $n^2 u_n = n^6 e^{-n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée, donc en posant $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies n^2 u_n \leq 1$.

On conclut en appliquant le critère de comparaison pour les séries positives : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

IV Séries à termes réels ou complexes

1) Convergence absolue

Définition 18 (Série absolument convergente).

*Si (u_n) est une suite réelle ou complexe, on dit que la série $\sum u_n$ est
 absolument convergente (ou "converge absolument") si
 la série (positive) $\sum |u_n|$ est convergente.*

Remarque

- Dans la définition précédente, $| \ |$ désigne la valeur absolue ou le module, selon les cas.
- Cette notion n'a d'intérêt que si (u_n) n'est pas de signe constant !

Théorème 19 (La convergence absolue entraîne la convergence).

*Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge . En d'autres termes,
 $\sum |u_n|$ converge $\implies \sum u_n$ converge.*

Preuve : Admis (voir le TD 1).

□

Exemple

Étude de la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$.

On a $|u_n| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit par le critère de comparaison pour les séries positives que $\sum |u_n|$ converge, c'est-à-dire que $\sum u_n$ est absolument convergente.

On conclut par le théorème précédent que la série $\sum u_n$ est convergente.

ATTENTION !

La réciproque est fautive : il existe des séries convergentes mais pas absolument convergentes (voir plus loin).

Ceci motive la définition suivante :

Définition 20 (Semi-convergence).

On dit qu'une **série** $\sum u_n$ (réelle ou complexe) est **semi-convergente** si elle est **convergente mais pas absolument convergente**, c'est-à-dire si $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge .

Méthode

Pour étudier la convergence d'une série à termes de signe non constant ou complexes, on peut **d'abord étudier la convergence absolue**.

- Avantage : cela revient à travailler avec une **série positive** $\sum |u_n|$, sur laquelle on peut tester tous les critères de la partie précédente.
- Inconvénient : si la série ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.

Proposition 21 (Inégalité triangulaire infinie).

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors on a l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

.....

Preuve : Pour tout entier naturel n , on a l'inégalité $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$
 (d'après l'inégalité triangulaire sur les sommes finies, vue en TSI 1).

Puisque $\sum u_n$ converge absolument, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |u_k|$ existe.

La convergence absolue entraîne la convergence, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ existe également.

Par continuité du module, on déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right|$.

On conclut en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |u_k|, \text{ c'est-à-dire } \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

□

2) Exemples de séries semi-convergentes

Un cas de référence est celui des **séries alternées**, c'est-à-dire dont le terme général u_n vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \times u_{n+1} \leq 0$$

(chaque terme de la suite a un signe contraire au terme précédent).

De telles séries sont de la forme :

$$\pm \sum (-1)^n a_n, \quad \text{avec } a_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Méthode

Si une série alternée $\sum (-1)^n a_n$ **n'est pas absolument convergente**, alors on peut essayer de montrer la convergence de la suite des sommes partielles (S_n) **en montrant que les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.**

Rappel

- Deux suites réelles sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.
- **Si** deux suites sont adjacentes, **alors** elles convergent vers la même limite.

Exemple (Une série semi-convergente)

Étude de la convergence de la «série harmonique alternée» $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Cette série n'est pas absolument convergente car $\left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$ et la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

En posant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0,$$

donc la suite (S_{2n}) est décroissante et la suite (S_{2n+1}) est croissante.

De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers un même réel S , ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, et donc

que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Illustration de la convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$:

On représente graphiquement les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de n :



Exemple (Plus difficile...)

Etude de la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.

Posons $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ pour $n \geq 2$.

Puisque $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, on a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais c'est inutile ici puisque $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas de signe constant (on ne peut donc pas appliquer le critère des équivalents).

Effectuons plutôt un développement asymptotique du terme général :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons alors $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $y_n = u_n - x_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Etudions la convergence de ces deux séries :

- La série $\sum x_n$ n'est pas absolument convergente, mais convergente. En effet, en posant $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ on peut montrer (comme dans l'exemple précédent) que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

- Puisque $y_n \sim -\frac{1}{2n}$, on obtient que y_n est de signe constant (strictement négatif) à partir d'un certain rang, donc on peut utiliser le critère des équivalents : la série $\sum -\frac{1}{2n}$ diverge, donc la série $\sum y_n$ diverge.

On en déduit par somme que la série $\sum u_n = \sum(x_n + y_n)$ diverge. Là aussi, on a donc affaire à une série semi-convergente.

V Développement décimal d'un nombre réel

1) Nombres décimaux

Définition 22 (Nombre décimal).

On appelle *nombre décimal* tout nombre rationnel de la forme $\frac{a}{10^m}$,
avec $a \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

Notation

On note \mathbb{D} l'ensemble des nombres décimaux.

Exemple

On a $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$, car $10 \times \frac{1}{2} = 5 \in \mathbb{Z}$. On a $\frac{-1}{125} = \frac{-1}{5^3} \in \mathbb{D}$, car $1000 \times \frac{-1}{125} = -8 \in \mathbb{Z}$.

Remarque

On a évidemment $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, et ces inclusions sont strictes : par exemple $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Sinon on aurait $10^m = 3a$ avec $a, m \in \mathbb{N}$, et donc 3 diviserait $2^m 5^m$, ce qui est impossible (d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier).

Proposition 23 (Opérations sur les nombres décimaux).

- (i) *La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.*
- (ii) *L'opposé d'un nombre décimal est un nombre décimal.*
- (iii) *Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.*

Preuve : Soient $x = \frac{a}{10^m}$ et $y = \frac{b}{10^n}$ deux nombres décimaux (avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $m, n \in \mathbb{N}$). On a

- (i) $x + y = \frac{10^n a + 10^m b}{10^{m+n}}$, donc $x + y \in \mathbb{D}$, puisque $10^n a + 10^m b \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $-x = \frac{-a}{10^m}$, donc $-x \in \mathbb{D}$, puisque $-a \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.
- (iii) $x \times y = \frac{ab}{10^{m+n}}$, donc $x \times y \in \mathbb{D}$, puisque $ab \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$.

□

ATTENTION !

L'inverse d'un nombre décimal n'est pas forcément un nombre décimal (penser à $\frac{1}{3}$).

2) Développement décimal / approximations décimales

Le théorème suivant est admis :

Théorème 24 (Développement décimal propre d'un réel positif).

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel **positif**.

Il existe une unique suite d'entiers naturels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

(i) $\forall n \geq 1, a_n \in \{0; 1; \dots; 9\}$;

(ii) la suite (a_n) n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang ;

(iii) $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ (avec convergence de la série)

On dit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est le **développement décimal propre** du réel x .

On note $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ et on dit que les $(a_n)_{n \geq 1}$ sont les "**chiffres après la virgule**" de x .

Remarque

Il est facile de voir qu'une telle série converge puisque $\forall k \geq 1, 0 \leq \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$, et la série géométrique $\sum \frac{9}{10^k}$ converge (sa raison est $1/10 \in]0; 1[$).

Exemple

- $\frac{1}{3} = 0,33333\cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$ (c'est-à-dire $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, a_n = 3$). En effet :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = 3 \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 3 \times \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

- $\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ avec $(a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; \cdots) = (3; 1; 4; 1; 5; \cdots)$.

ATTENTION !

Un réel positif x possède des développements décimaux différents de son développement décimal propre! Ce genre de développement "impropre" stationne à 9 à partir d'un certain rang.

Exemple

- $2,99999\cdots = 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 2 + \frac{9}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 3 = 3,0000\cdots$

- $132,45269999\cdots = 132,4526 + \underbrace{\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{9}{10^k}}_{=9 \times \frac{\frac{1}{10^5}}{1 - \frac{1}{10}}} = 132,4526 + 10^{-4} = 132,4527.$

Proposition 25 (Approximations décimales d'un réel positif).

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Notons $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ le développement décimal propre de x .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle de rang n de ce développement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n.$$

.....
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(i) $0 \leq x - S_n < 10^{-n}$;

(ii) $S_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$, où $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la fonction "partie entière" .

.....
On dit que S_n est l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.

Remarque

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $T_n = S_n + 10^{-n}$ est appelé **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**. On peut montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes, et elles convergent toutes deux vers le réel positif x .

Exemple (Approximations décimales de π)

Si $x = \pi$, alors la suite de ses approximations décimales par défaut est

$$S_0 = 3, \quad S_1 = 3,1, \quad S_2 = 3,14, \quad S_3 = 3,141, \quad S_4 = 3,1415, \dots$$

La suite de ses approximations décimales par excès est

$$T_0 = 4, \quad T_1 = 3,2, \quad T_2 = 3,15, \quad T_3 = 3,142, \quad T_4 = 3,1416, \dots$$

Illustration :

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R_n = x - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ le reste d'ordre n du développement décimal propre de x . Puisque $\forall k \geq 1, 0 \leq a_k \leq 9$ et puisque la suite (a_k) ne stationne pas 9, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq R_n < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \times \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-n},$$

ce qui montre le point (i). On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq x < S_n + 10^{-n},$$

c'est-à-dire (en multipliant par 10^n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10^n S_n \leq 10^n x < 10^n S_n + 1.$$

Or, $10^n S_n = 10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + \cdots + 10 a_{n-1} + a_n \in \mathbb{N}$, donc, par définition de la partie entière, l'inégalité précédente montre que

$$10^n S_n = E(10^n x),$$

ce qui donne le résultat.



On peut étendre la notion de développement décimal propre aux réels négatifs.

Définition 26 (Développement décimal propre d'un réel négatif).

Soit x un réel **négatif**. On appelle **développement décimal propre** du réel x l'écriture

$$x = -b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots ,$$

où $b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ est le développement décimal propre de $|x| = -x$.

ATTENTION !

Si $x > 0$, alors $a_0 = E(x)$, mais si $x < 0$, alors $b_0 = E(-x) \neq -E(x)$.

Exemple

Si $x = -4,11111 \cdots$, alors $b_0 = 4 = E(-x)$ mais $-E(x) = -(-5) = 5$.

3) Caractérisation des nombres décimaux/rationnels

Parmi les nombres réels, les nombres décimaux et rationnels sont ceux dont le développement décimal propre possède des propriétés particulières.

Proposition 27 (Caractérisation des nombres décimaux).

Soit un réel $x > 0$.

x est décimal si et seulement si son développement décimal propre est *fini*,
ce qui signifie que *la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ des chiffres de x après la virgule*
est nulle à partir d'un certain rang.

Proposition 28 (Caractérisation des nombres rationnels).

Soit un réel $x > 0$.

x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est
périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire de la forme

$$x = a_0, a_1 \cdots a_p \underbrace{a_{p+1} \cdots a_{p+T}}_{\text{periode}} \underbrace{a_{p+1} \cdots a_{p+T}} \cdots \underbrace{a_{p+1} \cdots a_{p+T}} \cdots$$

Preuve : On admettra ces deux résultats. □

Exemple

Déterminer le développement décimal propre de $x = \frac{22}{7}$.

Faire des divisions euclidiennes successives.

$$\begin{array}{r|l}
 22 & 7 \\
 \hline
 1 & 3,142857 \\
 & 3 \\
 & 2 \\
 & 6 \\
 & 4 \\
 & 5 \\
 & 1
 \end{array}$$

On obtient la période du développement du nombre rationnel lorsqu'on retombe sur le même reste.

Exemple

Vérifier que $3,\underbrace{142857}_{}\underbrace{142857}_{}\cdots\underbrace{142857}_{}\cdots = \frac{22}{7}$.

Notons $x = 3,\underbrace{142857}_{}\underbrace{142857}_{}\cdots\underbrace{142857}_{}\cdots$. On a

$$x - 3 = 0,\underbrace{142857}_{}\underbrace{142857}_{}\cdots$$

donc

$$10^6(x - 3) = 142857,\underbrace{142857}_{}\underbrace{142857}_{}\cdots = 142857 + (x - 3).$$

On en déduit

$$x = 3 + \frac{142857}{10^6 - 1} = 3 + \frac{142857}{999999} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$