Concours Blanc

Lycées Antonin Artaud (13), Lycée Jules Ferry (06) et Germaine Tillion (25)

Mars 2020

Problème n° 1

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$−espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, et dans tout ce qui suit, on désignera par $\mathscr{B}_0 = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est à dire : $\mathrm{Id} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array} \right.$.

Dans tout cet exercice, f désignera l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans $\mathscr{B}_0$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ -4 & b & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que si λ désigne une valeur propre de f, on note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Les différentes parties de ce problème ne sont pas indépendantes.

Préliminaire

Q1. Montrer qu'il existe une unique élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_1 = 1 + X + X^2$ soit un vecteur propre de f. Quelle est alors la valeur propre de f associée au vecteur propre P_1 ?

Partie A - Caractère diagonalisable de f pour $(a, b) = (4, 1)$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $(a, b) = (4, 1)$.

Q2. Vérifier que -1 est une valeur propre de f, puis donner une base de $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}\right)$.

Q3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

Partie B - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$

Q4. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(p_0 + p_1 X + p_2 X^2, q_0 + q_1 X + q_2 X^2\right) & \longmapsto & p_0 q_0 + p_1 q_1 + 2 p_2 q_2 \end{array} \right.$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Q5. On rappelle que -1 est une valeur propre de f.

Montrer qu'il existe une valeur propre de f, notée μ, telle que les deux sous-espaces E_{-1} et E_μ soient orthogonaux pour le produit scalaire φ et préciser la valeur de μ.

Q6. La base $\mathscr{B}'$ précédemment déterminée est-elle orthogonale pour le produit scalaire φ ?

Partie C - Construction d'une base orthonormée

On désigne par $\mathscr{C}$ la famille de vecteurs $\left(1+X+X^2, 2X-X^2, 1+X^2\right)$.

Q7. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q8. Déterminer une famille de vecteurs (Q_1, Q_2, Q_3) de $\mathbb{R}_2[X]$, orthonormale pour le produit scalaire φ, vérifiant les conditions suivantes :

— $\mathrm{Vect}\,(Q_1) = \mathrm{Vect}\left(1+X+X^2\right)$;
— $\mathrm{Vect}\,(Q_1, Q_2) = \mathrm{Vect}\left(1+X+X^2, 2X-X^2\right)$;
— $\mathscr{G} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dont on note (α, β, γ) les coordonnées dans la base $\mathscr{G} = (Q_1, Q_2, Q_3)$.
Exprimer les trois réels α, β et γ en fonction de $\varphi(P, Q_1)$, $\varphi(P, Q_2)$ et $\varphi(P, Q_3)$.

Q10. Montrer que les deux sous-espaces $F_1 = \mathrm{Vect}\,(Q_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}\,(Q_2, Q_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Q11. Déterminer la matrice dans $\mathscr{B}_0$ de la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

Problème n° 2

Ce problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en le précisant dans la copie.

Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$(E_\mu) : \quad 16\left(x^2-x\right)y'' + (16x-8)\,y' - \mu y = 0$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0;1[$.

Partie A - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$, et on cherche donc à résoudre sur $]0;1[$ l'équation :

$$(E_0) : \quad 16\left(x^2-x\right)y'' + (16x-8)\,y' = 0$$

Q12. Soit $f : x \longmapsto \arcsin(2x-1)$. Montrer que f est définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0;1[$ et que :

$$\forall x \in \,]0;1[\,,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Q13. Montrer que toute fonction constante sur $]0;1[$ est solution de (E_0).

Q14. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\},\ \dfrac{16x-8}{16\left(x^2-x\right)} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}$.

Q15. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à $(E_\star) : z' + \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}\right)z = 0$.

Q16. Résoudre $(E_\star)$ sur $]0;1[$.

Q17. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0;1[$.

Partie B - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$.

Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif : $\quad \forall x \in \,]-R;R[\,,\ y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q18. Justifier que y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ensemble que vous préciserez.

Q19. Montrer que y vérifie (E_μ) si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(16n^2-\mu\right)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right)x^n = 0$.

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q20. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^n(2n)!}\,a_0$

Q21. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q22. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q23. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, préciser le rayon de convergence de y.

Partie C - Étude d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.
Soit Φ la fonction définie sur l'intervalle $]-\mathrm{R};\mathrm{R}[$ par la relation :

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question Q20 et R est le rayon de convergence obtenu à la question Q23.

Q24. À partir de la relation obtenue à la question Q20, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!}$

Q25. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1).$

Q26. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = -\dfrac{(4n)!}{4^{2n}\left((2n)!\right)^2 \times (4n-1)}$

Q27. On admet le résultat suivant, appelé formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$

Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}$.

Q28. Rappeler le rayon de convergence de Φ et préciser la convergence de la série au bornes de l'intervalle de convergence.

Q29. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non nulle sur l'intervalle $]0;1[$.

Problème n° 3

On dispose de deux pièces de monnaie différentiables, dénommées dans la suite du problème « pièce 1 » et « pièce 2 ». On effectue une série de n lancers indépendants, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec l'une ou l'autre pièce, selon un protocole décrit ensuite. Suivant les questions posées, l'entier n prendra différentes valeurs précisées dans l'énoncé.

Pour chaque pièce, l'obtention du côté pile au cours d'un lancer peut être modélisé par une loi de Bernoulli de paramètre p_1 pour la pièce 1, et de paramètre p_2 pour la pièce 2. On rappelle que l'on a $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.

Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on considère les événements suivants :

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 1 et donne pile » que l'on note P_i ;

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 1 et donne face » que l'on note $\mathrm{F}_i = \overline{\mathrm{P}_i}$;

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 2 et donne pile » que l'on note P'_i ;

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 2 et donne face » que l'on note $\mathrm{F}'_i = \overline{\mathrm{P}'_i}$;

Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω désigne l'ensemble des séries de n lancers possibles, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{P}_i) = p_1, \mathbb{P}(\mathrm{F}_i) = q_1 = 1 - p_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{P}'_i\right) = p_2, \mathbb{P}\left(\mathrm{F}'_i\right) = q_2 = 1 - p_2$$

Le protocole de lancer est le suivant : on choisit une des deux pièces au hasard, et on effectue le premier lancer avec la pièce choisie. Si le résultat est pile, on rejoue avec la même pièce, sinon, on change pour le lancer suivant.

On itère ce processus jusqu'au n^e lancer en conservant la même pièce tant que le lancer donne pile et en changeant de pièce pour le lancer suivant lorsqu'on obtient face.

On note C_1 l'événement « choisir la pièce 1 au premier lancer » et C_2 l'événement « choisir la pièce 2 au premier lancer ». On a : $\mathbb{P}(\mathrm{C}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_2) = \dfrac{1}{2}$.

Partie A - Étude d'une série de deux lancers

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$, et on s'intéresse ainsi à une série de 2 lancers.

Q30. Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?

Q31. On effectue le second lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?

Partie B - Étude d'une série de 6 lancers

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$, et on s'intéresse à une série de 6 lancers.

Q32. On suppose dans cette question que la pièce 1 a été choisie pour le premier lancer.
On note A l'événément « Obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1, puis deux fois pile avec la pièce 2 ».
Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction des données p_1 et p_2.

Q33. On suppose dans cette question que la pièce 2 a été choisie pour le premier lancer.
On note B l'événément « jouer cinq fois de suite avec la pièce 2, puis jouer le 6e lancer avec la pièce 1 ».
Déterminer $\mathbb{P}(B)$ en fonction des données p_1 et p_2.

Q34. Sachant que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer les deux lancers suivants avec deux pièces différentes ?

Q35. Quelle est la probabilité d'effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ?

Partie C - Un jeu à partir d'une série de n lancers

Dans cette partie, on s'intéresse à une série de n lancers où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.
On note D_n l'événement « on utilise la pièce 1 pour la première fois au n^e lancer ».

Q36. Déterminer $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On pourra distinguer les cas $n = 1$ et $n > 1$.

Q37. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n)$ converge, et calculer sa somme.

Q38. En supposant que l'on puisse effectuer une infinité de lancers, quelle est la probabilité de l'événement « ne jamais utiliser la pièce 1 »

Dans toute la suite du problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

On considère alors l'expérience aléatoire suivante : on effectue N lancers selon le protocole étudié précédemment. On gagne 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 1, et on perd 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 2.

La variable aléatoire X_N désigne le nombre de points obtenus à l'issue de N lancers. X_N peut donc prendre des valeurs entières $k \in [\![-N;N]\!]$.

La variable aléatoire U_N désigne le nombre de fois où l'on joue avec la pièce 1 au cours des N lancers.

Q39. Déterminer $\mathbb{P}([X_N = N])$ et $\mathbb{P}([X_N = -N])$.
Pour la suite de l'exercice, on suppose que $p_1 = p_2 = \dfrac{3}{10}$.

Q40. Dans cette question uniquement, on suppose que $N = 3$. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3, puis son espérance $\mathbb{E}(X_3)$.
Dans toute la fin de cette partie, on suppose que $N \geq 2$.

Q41. Soit $k \in [\![-N;N]\!]$. Exprimer l'événenement $[X_N = k]$ en fonction de U_N.

Q42. En déduire $\mathbb{P}([X_N = N-1])$.

Q43. Que vaut $\mathbb{P}([X_N = 0])$ lorsque N est un entier impair ?

Q44. Déterminer $\mathbb{P}([X_N = N-2])$ et $\mathbb{P}([X_N = -N+2])$.