Concours Blanc

Lycées Antonin Artaud (13), Lycée Jules Ferry (06) et Germaine Tillion (25)

Mars 2020

Problème n° 1

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, et dans tout ce qui suit, on désignera par $\mathscr{B}_0 = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est à dire : $\mathrm{Id} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array} \right.$.

Dans tout cet exercice, f désignera l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans $\mathscr{B}_0$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ -4 & b & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que si λ désigne une valeur propre de f, on note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Les différentes parties de ce problème ne sont pas indépendantes.

Préliminaire

Q1. Montrer qu'il existe une unique élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_1 = 1 + X + X^2$ soit un vecteur propre de f. Quelle est alors la valeur propre de f associée au vecteur propre P_1 ?

Éléments de réponse: Il est clair que P_1 est non nul. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_1 \text{ est un vecteur} \\ \text{propre de } f \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left(\exists (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3,\ f(P_1) = \lambda P_1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(P_1) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(P_1)\right) \\
&= \left(\exists (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ -4 & b & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a-3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & & & - & \lambda & = & 3 \\ & & b & - & \lambda & = & 0 \\ & & & & \lambda & = & 1 \end{array} \right.\right) \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 1 \\ \lambda = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que P_1 est vecteur propre de f. Il s'agit du couple $(4, 1)$, et dans ce cas, P_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1. □

Partie A - Caractère diagonalisable de f pour $(a, b) = (4, 1)$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $(a, b) = (4, 1)$.

Q2. Vérifier que -1 est une valeur propre de f, puis donner une base de $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}\right)$.

Éléments de réponse: La caractérisation des valeurs propres par le rang donne, puisque $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)$:

$$\left(-1 \text{ est valeur propre de } f\right) \Leftrightarrow \left(A + I_3 \notin GL_3(\mathbb{R})\right)$$

On a : $A + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ où l'on remarque les deuxième et troisième colonnes sont liées. Par suite, cette matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ n'est pas de rang 3, et donc n'est pas inversible.

On en déduit donc que -1 est valeur propre de f.

En notant $P = c + bX + aX^2$ où $(c,b,a) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\big(P \in E_{-1}(f)\big) & \Leftrightarrow & \big(f(P) = -P\big) \\
& \Leftrightarrow & \big(\big(f+\mathrm{Id}\big)(P) = \tilde{0}\big) \\
& \Leftrightarrow & \big(P \in \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id})\big) \\
& \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (c,b,a) \in \mathbb{R}^3 \text{ est solution} \\ \text{du système de représentation} \\ \text{matricielle } (A+I_3|0) \end{array}\right)
\end{array}$$

Un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(A + I_3|0)$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{5}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{5}{6}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{5}{6}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $\big(P \in E_{-1}(f)\big) \Leftrightarrow \big(P \in \mathrm{Vect}\,(X^2 - 2X)\big)$. □

Q3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

Éléments de réponse: D'après ce qui précéde, f possède au moins deux valeurs propres, 1, dont on ne connaît pas la dimension du sous-espace propre associé, et -1 dont la dimension du sous-espace propre associé est égale à 1.

Déterminons donc toutes les valeurs propres de f. On sait que : $(\lambda$ est valeur propre de $f)$ $\Leftrightarrow$ $\big(\chi_f(\lambda) = 0\big)$ où χ_f désigne le polynôme caractéristique de f, qui par définition est : $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
\det(\lambda I_3 - A) & = & \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 2 \\ 4 & \lambda-1 & -4 \\ -5 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\
& \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} & \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & -4 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} & (\lambda-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
& \underset{\substack{\text{Déterminant} \\ \text{triangulaire}}}{=} & (\lambda-2) \times (1 \times (\lambda-1) \times (\lambda+1)) \\
& = & (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)
\end{array}$$

On en déduit donc que les valeurs propres de f sont exactement -1, 1 et 2.
Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathscr{L}\big(\mathbb{R}^3\big)$ qui possède 3 valeurs propres distinctes. Par théorème f est diagonalisable.
Par ailleurs, la dimension des sous-espaces propres associés à chaque valeur propre est égale à 1. On a donc $E_1\big(f\big) = \mathrm{Vect}\,\big(1 + X + X^2\big)$

En remarquant alors que :

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& = & 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

on en déduit que $f\big(1 + X^2\big) = 2\big(1 + X^2\big)$, c'est à dire que $1 + X^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, et comme il est clairement non nul, il vient que $E_2(f) = \mathrm{Vect}\,\big(1 + X^2\big)$.

Ainsi, la famille $\mathscr{B}' = \big(1 + X + X^2, 1 + X^2, X^2 - 2X\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f. □

Partie B - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$

Q4. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big(p_0 + p_1X + p_2X^2, q_0 + q_1X + q_2X^2\big) & \longmapsto & p_0q_0 + p_1q_1 + 2p_2q_2 \end{array} \right.$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Éléments de réponse:

Caractère symétrique de φ : soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ où $P = p_0 + p_1X + p_2X^2$ et $Q = q_0 + q_1X + q_2X^2$.

On a :

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(P,Q) & = & p_0q_0 + p_1q_1 + 2p_2q_2 \\
& = & q_0p_0 + q_1p_1 + 2q_2p_2 \\
& = & \varphi(Q,P)
\end{array}$$

et par suite φ est symétrique.

Caractérère bilinéaire de φ : soient $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ où $P = p_0 + p_1 X + p_2 X^2$, $Q = q_0 + q_1 X + q_2 X^2$ et $R = r_0 + r_1 X + r_2 X^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord : $\lambda P + Q = (\lambda p_0 + q_0) + (\lambda p_1 + q_1) X + (\lambda p_2 + q_2) X^2$.

On a alors :
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q, R) &= (\lambda p_0 + q_0) \times r_0 + (\lambda p_1 + q_1) \times r_1 + 2(\lambda p_2 + q_2) \times r_2 \\ &= \lambda p_0 r_0 + q_0 r_0 + \lambda p_1 r_1 + q_1 r_1 + 2\lambda p_2 r_2 + 2 q_2 r_2 \\ &= \lambda(p_0 r_0 + p_1 r_1 + 2 p_2 r_2) + q_0 r_0 + q_1 r_1 + 2 q_2 r_2 \\ &= \lambda \varphi(P,R) + \varphi(Q,R)\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire à gauche. Comme φ est symétrique, on en déduit que φ est bien bilinéaire.

Caractère positif : soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ où $P = p_0 + p_1 X + p_2 X^2$.

Par définition de φ, il vient que : $\varphi(P,P) = p_0^2 + p_1^2 + 2p_2^2$.

Comme $p_0^2 \geq 0$, $p_1^2 \geq 0$ et $2p_2^2 \geq 0$, $\varphi(P,P)$ est une somme de termes positifs, il est donc positif. Ainsi, φ est positif.

Caractère définie : soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ où $P = p_0 + p_1 X + p_2 X^2$.

Par définition de φ, il vient que : $\varphi(P,P) = p_0^2 + p_1^2 + 2p_2^2$.

Comme $p_0^2 \geq 0$, $p_1^2 \geq 0$ et $2p_2^2 \geq 0$, $\varphi(P,P)$ est une somme nulle de termes positifs. Chacun des termes est donc nul. On a ainsi $p_0^2 = 0$, $p_1^2 = 0$ et $2p_2^2 = 0$, ce qui donne $p_0 = 0$, $p_1 = 0$ et $p_2 = 0$. Par conséquent $P = \tilde{0}$, et φ est donc définie.

Conclusion : φ étant une application bilinéaire, symétrique, positive définie, par définition, c'est un produit scalaire.

□

Q5. On rappelle que -1 est une valeur propre de f.

Montrer qu'il existe une valeur propre de f, notée μ, telle que les deux sous-espaces E_{-1} et E_μ soient orthogonaux pour le produit scalaire φ et préciser la valeur de μ.

Éléments de réponse: Les sous-espaces propres de f étant tous de dimension 1, il est nécessaire et suffisant de montrer qu'un vecteur non nul de l'un est orthogonal à un vecteur non nul de l'autre pour ce produit scalaire pour s'assurer du caractère orthogonal de deux sous-espaces propres.

On remarque alors que :
$$\begin{aligned}\varphi(-2X + X^2, 1 + X + X^2) &= 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 \times 1 \\ &= -2 + 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que E_1 et E_{-1} sont orthogonaux. □

Q6. La base $\mathscr{B}'$ précédemment déterminée est-elle orthogonale pour le produit scalaire φ ?

Éléments de réponse: Comme on a :
$$\begin{aligned}\varphi(1 + X^2, 1 + X + X^2) &= 1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

les deux vecteurs $1 + X^2$ et $1 + X + X^2$ ne sont pas orthogonaux pour φ, et par suite $\mathscr{B}'$ n'est pas orthogonale pour φ. □

On désigne par $\mathscr{C}$ la famille de vecteurs $\left(1+X+X^2, 2X-X^2, 1+X^2\right)$.

Q7. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Éléments de réponse: À l'ordre près des vecteurs, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}'$ sont formées des mêmes vecteurs, donc d'après la question Q3, on sait que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. □

Q8. Déterminer une famille de vecteurs (Q_1, Q_2, Q_3) de $\mathbb{R}_2[X]$, orthonormale pour le produit scalaire φ, vérifiant les conditions suivantes :

— $\text{Vect}(Q_1) = \text{Vect}\left(1+X+X^2\right)$;
— $\text{Vect}(Q_1, Q_2) = \text{Vect}\left(1+X+X^2, 2X-X^2\right)$;
— $\mathscr{G} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Éléments de réponse: D'après les questions précédentes, en posant $Q_1 = 1+X+X^2$ et $Q_2 = 2X-X^2$, on sait déjà que Q_1 et Q_2 sont deux vecteurs orthgonaux de $\mathbb{R}_2[X]$ pour φ.

On cherche donc un polynôme $Q_3 = 1+X^2+\alpha Q_1+\beta Q_2$ tel que $\begin{cases} \varphi(Q_3, Q_1) = 0 \\ \varphi(Q_3, Q_2) = 0 \end{cases}$.

Comme $\varphi(Q_3, Q_1) = 3+4\alpha$ et $\varphi(Q_3, Q_2) = -2+6\beta$, il vient que $\alpha = -\dfrac{3}{4}$ et $\beta = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, $Q_3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12}X - \dfrac{1}{12}X^2$.

La famille (Q_1, Q_2, Q_3) est par construction orthogonale. Elle forme donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme il s'agit d'une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, par théorème, elle en forme une base.

Par défintion : $\begin{aligned} \|Q_1\|^2 &= \varphi(Q_1, Q_1) \\ &= 1+1+2 \\ &= 4 \end{aligned}$ et donc $\|Q_1\| = 2$.

De même : $\begin{aligned} \|Q_2\|^2 &= \varphi(Q_2, Q_2) \\ &= 4+2 \\ &= 6 \end{aligned}$ et donc $\|Q_2\| = \sqrt{6}$.

Finalement : $\begin{aligned} \|Q_3\|^2 &= \varphi(Q_3, Q_3) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{144} + \frac{2}{144} \\ &= \frac{12}{144} \end{aligned}$ et ainsi $\|Q_3\| = \dfrac{2\sqrt{3}}{12}$.

et la famille $\left(\dfrac{1}{\|Q_1\|} \times Q_1, \dfrac{1}{\|Q_2\|} \times Q_2, \dfrac{1}{\|Q_3\| \times} Q_3\right)$ est une clairement une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire. □

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dont on note (α, β, γ) les coordonnées dans la base $\mathscr{G} = (Q_1, Q_2, Q_3)$.
Exprimer les trois réels α, β et γ en fonction de $\varphi(P, Q_1)$, $\varphi(P, Q_2)$ et $\varphi(P, Q_3)$.

Éléments de réponse: La famille $\mathscr{G}$ étant une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, P s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P = \varphi\left(P, \frac{1}{\|Q_1\|}Q_1\right) \times \frac{1}{\|Q_1\|}Q_1 + \varphi\left(P, \frac{1}{\|Q_2\|}Q_2\right) \times \frac{1}{\|Q_2\|}Q_2 + \varphi\left(P, \frac{1}{\|Q_3\|}Q_3\right) \times \frac{1}{\|Q_3\|}Q_3$$

Ainsi, les coordonnées (α, β, γ) de P dans la base $\mathscr{G}$ sontpar bilinéairité du produit scalaire : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\|Q_1\|^2}\varphi(P, Q_1) \\ \beta = \dfrac{1}{\|Q_2\|^2}\varphi(P, Q_2) \\ \gamma = \dfrac{1}{\|Q_3\|^2}\varphi(P, Q_3) \end{cases}$. □

Q10. Montrer que les deux sous-espaces $F_1 = \text{Vect}(Q_1)$ et $F_2 = \text{Vect}(Q_2, Q_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Éléments de réponse: Puisque $\mathscr{G}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ où l'on a donc $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(Q_1, Q_2, S_3)$, les deux sous-espaces $\text{Vect}(Q_1)$ et $\text{Vect}(Q_2, Q_3)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$. □

Q11. Déterminer la matrice dans $\mathscr{B}_0$ de la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

Éléments de réponse: Notons p la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

D'après la question Q10, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$: $P = \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3$. Donc d'après la définition de la projection sur F_1 parallèlement à F_2, il vient que $p(P) = \alpha Q_1$, c'est à dire que $p(P) = \dfrac{1}{\|Q_1\|^2}\varphi(P, Q_1) Q_1$ c'est à dire $p(P) = \dfrac{1}{4}\varphi\left(P, 1+X+X^2\right) \times \left(1+X+X^2\right)$.

On en déduit donc que :
$$\begin{aligned} p(\bar{1}) &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 0\times 1 + 2\times 0\times)\left(1+X+X^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1+X+X^2\right) \end{aligned}$$

De même :
$$\begin{aligned} p(X) &= \frac{1}{4}(0\times 1 + 1\times 1 + 2\times 0\times)\left(1+X+X^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1+X+X^2\right) \end{aligned}$$

et :
$$\begin{aligned} p(X^2) &= \frac{1}{4}(0\times 1 + 0\times 1 + 2\times 1\times)\left(1+X+X^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+X+X^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que la matrice de p dans la base $\mathscr{B}_0$ est $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. □

Problème n° 2

Ce problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en le précisant dans la copie.

Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle $\left(E_\mu\right)$ suivante :

$$\left(E_\mu\right) : \quad 16\left(x^2 - x\right) y'' + (16x - 8)\, y' - \mu y = 0$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0;1[$.

Partie A - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$, et on cherche donc à résoudre sur $]0;1[$ l'équation :

$$(E_0) : \quad 16\left(x^2 - x\right) y'' + (16x - 8)\, y' = 0$$

Q12. Soit $f : x \longmapsto \arcsin(2x-1)$. Montrer que f est définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0;1[$ et que :

$$\forall x \in\,]0;1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Éléments de réponse: La fonction $x \longmapsto 2x-1$ est clairement définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$. Elle est par ailleurs strictement croissante sur cet intervalle, et on en déduit que l'image par $x \longmapsto 2x-1$ de l'intervalle $[0;1]$ est donc $[-1;1]$.

Par suite, la fonction f est bien définie sur $[0;1]$. La fonction $x \longmapsto \arcsin(x)$ étant continue sur $[-1;1]$, par composition la fonction f est continue sur $[0;1]$.

Par contre, la fonction $x \longmapsto \arcsin(x)$ est dérivable seulement sur $]-1;1[$. L'image par $x \longmapsto 2x-1$ de l'intervalle $]0;1[$ est $]-1;1[$. Par composition, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;1[$.

On a alors :
$$\begin{aligned} \forall x \in\,]0;1[,\ f'(x) &= 2\times\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+4x+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\left(x-x^2\right)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4}\times\sqrt{x-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$
□

Q13. Montrer que toute fonction constante sur $]0;1[$ est solution de (E_0).

Éléments de réponse: Soit $f : x \longmapsto k$ où $k \in \mathbb{R}$. La fonction f est clairement deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;1[$, et on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]0;1[\,,\ f'(x) & = & 0 \\ \text{et } f''(x) & = & 0 \end{array}$$

D'où il vient : $$\begin{array}{rcl} \forall x \in]0;1[\,,\ 16\left(x^2-x\right) \times f''(x) + (16x-8) \times f'(x) & = & 16\left(x^2-x\right) \times 0 + (16x-8) \times 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

et par conséquent, f vérifie bien (E_0). □

Q14. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{16x-8}{16\left(x^2-x\right)} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}$.

Éléments de réponse: Un calcul direct donne que : $$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)} & = & \dfrac{x-1}{2x(x-1)} + \dfrac{x}{2x(x-1)} \\ & = & \dfrac{x-1+x}{2x(x-1)} \\ & = & \dfrac{2x-1}{2x(x-1)} \\ & = & \dfrac{8(2x-1)}{8 \times 2x(x-1)} \\ & = & \dfrac{16x-8}{16x(x-1)} \\ & = & = \dfrac{16x-8}{16\left(x^2-x\right)} \end{array}$$ □

Q15. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à $(\mathrm{E}_\star)$: $z' + \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}\right) z = 0$.

Éléments de réponse: Il est clair qu'en posant $z = y'$, on a $z' = y''$.

Par suite, on a : $$\begin{array}{rcl} \left(\begin{array}{c} y \text{ est solution de} \\ (\mathrm{E}_0) \text{ sur }]0;1[\end{array}\right) & \Leftrightarrow & \left(\forall x \in]0;1[\,,\ 16\left(x^2-x\right) \times y''(x) + (16x-8) \times y'(x) = 0\right) \\ & \underset{\substack{\forall x \in]0;1[, \\ x^2-x \neq 0}}{\Leftrightarrow} & \left(\forall x \in]0;1[\,,\ y''(x) + \dfrac{16x-8}{16\left(x^2-x\right)} \times y'(x) = 0\right) \\ & \Leftrightarrow & \left(\forall x \in]0;1[\,,\ y''(x) + \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}\right) y'(x) = 0\right) \\ & \Leftrightarrow & \left(\forall x \in]0;1[\,,\ z'(x) + \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}\right) z(x) = 0\right) \\ & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} z \text{ est solution de} \\ (\mathrm{E}_\star) \text{ sur }]0;1[\end{array}\right) \end{array}$$ □

Q16. Résoudre $(\mathrm{E}_\star)$ sur $]0;1[$.

Éléments de réponse: $(\mathrm{E}_\star)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène mise sous forme résolue.

Une primitive sur $]0;1[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2(x-1)}$ étant la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(x-1)$ puisque sur $]0;1[$ les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x-1$ sont strictement positives, par théorème les solutions de $(\mathrm{E}_\star)$ sur $]0;1[$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto \mathrm{C} \times \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right)} \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

Un calcul direct donne que : $$\begin{array}{rcl} \forall x \in]0;1[\,,\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right)} & = & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(x-1)} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \end{array}$$

On en déduit donc que les solutions sur $]0;1[$ de $(\mathrm{E}_\star)$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{x(x-1)}} \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

□

Q17. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0;1[$.

Éléments de réponse: D'après la question Q16, les solutions de (E_0) sur $]0;1[$ sont les fonctions $y : x \longmapsto y(x)$ telles que, pour tout $x \in]0;1[$, $y'(x) = z(x)$ c'est à dire telles que $y'(x) = \dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{x(x-1)}}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

D'après la question Q13, les primitives sur $]0;1[$ des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$ sont les fonctions $x \longmapsto \arcsin(2x-1) + \mathrm{K}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.

On en déduit donc que les solutions sur $]0;1[$ de (E_0) sont les fonctions :

$$x \longmapsto \mathrm{C}_1 \arcsin(2x-1) + \mathrm{C}_2 \text{ où } (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R}^2$$

□

Partie B - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$.

Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif : $\quad \forall x \in]-R;R[,\ y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q18. Justifier que y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ensemble que vous préciserez.

> ***Éléments de réponse:*** Par théorème, la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, à savoir ici $]-R;R[$. Ainsi, y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R;R[$. □

Q19. Montrer que y vérifie (E_μ) si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(16n^2-\mu\right) a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right) x^n = 0$.

> ***Éléments de réponse:*** D'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R;R[,\ y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y \text{ est solution de} \\ (E_\mu) \text{ sur }]-R;R[\end{pmatrix}
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\ 16\left(x^2-x\right)\times y''(x) + (16x-8)\times y'(x) - \mu \times y(x) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\ 16\left(x^2-x\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (16x-8)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\ \sum_{n=2}^{\infty} 16n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 16n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 16n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 8n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mu a_n x^n = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in]-R;R[,\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 16n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 16n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 16n a_n x^n \\ \displaystyle - \sum_{n=0}^{+\infty} 8(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mu a_n x^n = 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in]-R;R[,\ \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(16n(n-1)a_n + 16n(n+1)a_{n+1} + 16n a_n + 8(n+1)a_{n+1} - \mu a_n\right) x^n \\ -16\times 1\times(1+1)\times a_{1+1} x^1 + 16\times 1\times a_1 x^1 \\ -8\times(0+1)\times a_{0+1} x^0 - 8\times(1+1)a_{1+1} x^1 - \mu a_0 x^0 - \mu a_1 x^1 = 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in]-R;R[,\ -\mu a_0 - 8a_1 + \left(\left(16-\mu\right)a_1 - 48a_2\right) \\ \displaystyle + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(16n(n-1)+16n-\mu\right) a_n + \left(16n(n+1)+8(n+1)\right) a_{n+1}\right) x^n = 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\ -\mu a_0 - 8a_1 + \left(\left(16-\mu\right)a_1 - 48a_2\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(16n^2-16n+16n-\mu\right) a_n + 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right) x^n = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\ \underbrace{-\mu a_0 - 8a_1}_{\substack{\text{terme d'indice 0} \\ \text{de la somme}}} + \underbrace{\left(\left(16-\mu\right)a_1 - 48a_2\right)}_{\substack{\text{terme d'indice 1} \\ \text{de la somme}}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(16n^2-\mu\right) a_n + 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right) x^n = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-R;R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(16n^2-\mu\right) a_n + 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right) x^n = 0\right)
\end{aligned}$$

□

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q20. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^n(2n)!} a_0$

Éléments de réponse: Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, d'après la question Q19, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(16n^2-\mu\right)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1} = 0$$

c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{16n^2-\mu}{8(n+1)(2n+1)}a_n \quad (\diamond)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $a_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^n(2n)!}a_0$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : d'après $(\diamond)$, on a d'une part :
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{16\times 0^2-\mu}{8(0+1)(2\times 0+1)}a_0 \\ &= -\frac{\mu}{8}a_0 \end{aligned}$$

et d'autre part :
$$\begin{aligned} \frac{\prod_{k=0}^{1-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^1\times(2\times 1)!}a_0 &= \frac{16\times 0^2-\mu}{4\times 2}a_0 \\ &= -\frac{\mu}{8}a_0 \end{aligned}$$

On a donc $a_1 = \dfrac{\prod_{k=0}^{1-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^1\times(2\times 1)!}a_0$, ce qui et bien $\mathscr{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathscr{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.

D'après $(\diamond)$, on a : $a_{n+1} = \dfrac{16n^2-\mu}{8(n+1)(2n+1)}a_n$.

D'où d'après $\mathscr{P}(n)$, il vient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{16n^2-\mu}{8(n+1)(2n+1)}\times\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^n(2n)!}a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{8(n+1)(2n+1)\times 4^n\times(2n)!}a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{2\times 4\times(n+1)\times 4^n\times(2n+1)!}a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{2(n+1)\times 4^{n+1}\times(2n+1)!}a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{(2n+2)\times 4^{n+1}\times(2n+1)!}a_0 \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{4^{n+1}\times(2n+2)!}a_0 \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathscr{P}(n)$ étant vraie pour $n=1$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Q21. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Éléments de réponse: Si $a_0 = 0$, d'après la question 21, une récurrence immédiate permet d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.

Par suite, y est la fonction nulle, et le rayon de convergence est alors $+\infty$.

□

Q22. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Éléments de réponse: Si $a_0 \neq 0$ et que $\mu = 16p^2$ avec $p \in \mathbb{N}$, il vient que :

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= \frac{\prod_{k=0}^{p}\left(16k^2-\mu\right)}{4^{p+1}(2p+2)!} \\ &= \frac{\overbrace{\left(16p^2-\mu\right)}^{=0}\times\prod_{k=0}^{p-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^{p+1}(2p+2)!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par une récurrence immédiate, on peut montrer d'après la question Q21, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p+1,\ a_n = 0$.

Par conséquent : $\forall x \in]-R;R[,\ y(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

La fonction y est donc une fonction polynôme de degré p.

□

Q23. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, préciser le rayon de convergence de y.

Éléments de réponse: Soit $x \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = |a_n x^n|$.

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{4^{n+1}(2n+2)!}x^{n+1}\right| \times \left|\frac{4^n(2n)!}{x^n \times \prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}\right| \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(16k^2-\mu\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)} \times \frac{4^n(2n)!}{4^{n+1}(2n+2)!} \times |x| \\
&= \left(16n^2-\mu\right) \times \frac{1}{4\times(2n+2)\times(2n+1)} \times |x| \\
&= \frac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)}|x| \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{16n^2}{16n^2}|x| \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|
\end{aligned}$$

Par suite, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes strictement positifs :

Si $|x| < 1$: la série numérique $\sum u_n$ est convergente, c'est à dire que la série numérique $\sum a_n x^n$ est absolument convergente ;

Si $|x| > 1$: la série numérique $\sum u_n$ est divergente et la série numérique $\sum a_n x^n$ est grossièrement divergente.

On en déduit donc par définition du rayon de convergence, que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est égal à 1. □

Partie C - Étude d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.

Soit Φ la fonction définie sur l'intervalle $]-\mathrm{R};\mathrm{R}[$ par la relation :

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question Q20 et R est le rayon de convergence obtenu à la question Q23.

Q24. À partir de la relation obtenue à la question 20, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!}$

Éléments de réponse: Puisque $\mu = 1$, il est immédiat que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 16k^2 - \mu = (4k-1)(4k+1)$, ce qui donne l'expression proposée pour a_n. □

Q25. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$.

Éléments de réponse: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n, que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : on a d'une part $(4\times 1)! = 4!$ c'est à dire $(4\times 1)! = 24$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
-2^{2\times 1} \times (2\times 1)! \times (4\times 1 - 1) \times \prod_{k=0}^{1-1}(4k-1)(4k+1) &= -2^2 \times 2 \times 3 \times ((4\times 0-1)(4\times 0+1)) \\
&= -4 \times 6 \times (-1) \\
&= 24
\end{aligned}$$

On a donc $(4\times 1)! = -2^{2\times 1} \times (2\times 1)! \times (4\times 1-1) \times \prod_{k=0}^{1-1}(4k-1)(4k+1)$, ce qui est bien $\mathscr{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathscr{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathscr{P}(n+1)$.

On a directement :

$$
\begin{array}{lll}
(4(n+1))! & = & (4n+4)! \\
 & = & (4n+4)\times(4n+3)\times(4n+2)\times(4n+1)\times(4n)! \\
 & \underset{\text{d'après } \mathscr{P}(n)}{=} & (4n+4)\times(4n+3)\times(4n+2)\times(4n+1)\times\left(-2^{2n}\times(2n)!\times(4n-1)\times\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)\right) \\
 & = & -\underbrace{(4n+4)}_{=2(2n+2)}\times(4n+3)\times\underbrace{(4n+2)}_{=2(2n+1)}\times(4n+1)\times2^{2n}\times(2n)!\times(4n-1)\times\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) \\
 & = & -2^{2n+2}\times(4n+3)\times(4n+1)\times(2n+2)\times(2n+1)\times(2n)!\times(4n-1)\times\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) \\
 & = & -2^{2n+2}\times(4n+3)\times(2n+2)!\times(4n+1)\times(4n-1)\times\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) \\
 & = & -2^{2n+2}\times\underbrace{(4n+3)}_{=4(n+1)-1}\times(2n+2)!\times\displaystyle\prod_{k=0}^{(n+1)-1}(4k-1)(4k+1) \\
 & = & -2^{2(n+1)}\times\underbrace{(2n+2)}_{=2(n+1)}!\times\times(4(n+1)-1)\displaystyle\prod_{k=0}^{(n+1)-1}(4k-1)(4k+1) \\
 & = & -2^{2(n+1)}\times(2(n+1))!\times\times(4(n+1)-1)\displaystyle\prod_{k=0}^{(n+1)-1}(4k-1)(4k+1)
\end{array}
$$

ce qui est bien $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathscr{P}(n)$ étant vraie pour $n=1$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

□

Q26. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=-\dfrac{(4n)!}{4^{2n}\,((2n)!)^2\times(4n-1)}$

Éléments de réponse: De la question Q26, on en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)\,(4k+1)=-\frac{(4n)!}{2^{2n}\times(2n)!\times(4n-1)}$.

Par suite, d'après la question Q25, il vient que :

$$
\begin{array}{lll}
\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n & = & -\dfrac{\dfrac{(4n)!}{2^{2n}\times(2n)!\times(4n-1)}}{4^n(2n)!}a_0 \\
 & = & -\dfrac{(4n)!}{2^{2n}\times(4n-1)\times4^n\times((2n)!)^2} \\
 & = & -\dfrac{(4n)!}{\left(2^2\right)^n\times(4n-1)\times4^n\times((2n)!)^2} \\
 & = & -\dfrac{(4n)!}{4^n\times(4n-1)\times4^n\times((2n)!)^2} \\
 & = & -\dfrac{(4n)!}{4^{2n}\times(4n-1)\times((2n)!)^2}
\end{array}
$$

□

Q27. On admet le résultat suivant, appelé formule de Stirling : $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$.

Montrer que $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{4n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}$.

Éléments de réponse: D'après la formule de Stirling, on a : $(4n)!\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi\times4n}$ et $(2n)!\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi\times2n}$

On en déduit donc par produit et quotient d'équivalents que :

$$
\begin{array}{lll}
a_n & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -\dfrac{\mathrm{e}^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi\times4n}}{4^{2n}\times(4n-1)\times\left(\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi\times2n}\right)^2} \\
 & = & -\dfrac{\mathrm{e}^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi}\times\sqrt{4n}}{4^{2n}\times(4n-1)\times\mathrm{e}^{-4n}(2n)^{4n}\times2\pi\times2n} \\
 & = & -\dfrac{1}{4^{2n}(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{4n}{2n}\right)^{4n} \\
 & = & -\dfrac{1}{4^{2n}(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\times2^{4n} \\
 & = & -\dfrac{1}{4^{2n}(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\times\left(2^4\right)^n \\
 & = & -\dfrac{1}{4^{2n}(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\times\left(2^2\times2^2\right)^n \\
 & = & -\dfrac{1}{4^{2n}(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\times\left(2^2\right)^2n \\
 & = & -\dfrac{1}{4^{2n}(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\times4^2n \\
 & = & -\dfrac{1}{(4n-1)\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} \\
 & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -\dfrac{1}{4n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}
\end{array}
$$

ce qui est bien l'équivalent proposé. □

Q28. Rappeler le rayon de convergence de Φ et préciser la convergence de la série au bornes de l'intervalle de convergence.

Éléments de réponse: D'après la question Q24, Φ est de rayon de convergence égal à 1, ce qui signifie que la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-1;1[$.

Étude de la convergence de $\sum a_n x^n$ dans le cas où $x = 1$: il s'agit donc d'étudier la convergence de la série numérique $\sum a_n$. D'après la question Q27, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}$. On en déduit tout d'abord que la série $\sum a_n$ est donc de signe constant à partir d'un certain rang, ici négatif, et d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum \frac{1}{4n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}$ sont de même nature.

Or $\sum \frac{1}{4n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}$ et $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont de même nature et comme $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Rieman convergente, on en déduit que la série numérique $\sum a_n$ est une série convergente.

Étude de la convergence de $\sum a_n x^n$ dans le cas où $x = -1$: il s'agit donc d'étudier la convergence de la série numérique $\sum (-1)^n a_n$. D'après la question Q27, on a $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{1}{4n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\right|$, et en reprenant les arguments précédents, la série $\sum |a_n|$ est convergente, c'est à dire que la série $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

On en déduit donc qu'il y a convergence aux bords de l'intervalle ouvert de convergence, et que par suite, le domaine de convergence de cette série entière est $[-1;1]$. □

Q29. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non nulle sur l'intervalle $]0;1[$.

Éléments de réponse: La fonction Φ est définie sur $[-1;1]$, non nulle et par construction vérifie (E_1). Par suite, sa restriction sur l'intervalle $]0;1[$ est encore solution de (E_1). □

Problème n° 3

On dispose de deux pièces de monnaie différentiables, dénommées dans la suite du problème « pièce 1 » et « pièce 2 ». On effectue une série de n lancers indépendants, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec l'une ou l'autre pièce, selon un protocole décrit ensuite. Suivant les questions posées, l'entier n prendra différentes valeurs précisées dans l'énoncé.

Pour chaque pièce, l'obtention du côté pile au cours d'un lancer peut être modélisé par une loi de Bernoulli de paramètre p_1 pour la pièce 1, et de paramètre p_2 pour la pièce 2. On rappelle que l'on a $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.

Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on considère les événements suivants :

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 1 et donne pile » que l'on note P_i ;

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 1 et donne face » que l'on note $F_i = \overline{P_i}$;

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 2 et donne pile » que l'on note P'_i ;

« Le i^e lancer est effectué avec la pièce 2 et donne face » que l'on note $F'_i = \overline{P'_i}$;

Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω désigne l'ensemble des séries de n lancers possibles, on a :

$$\mathbb{P}(P_i) = p_1, \mathbb{P}(F_i) = q_1 = 1 - p_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(P'_i\right) = p_2, \mathbb{P}\left(F'_i\right) = q_2 = 1 - p_2$$

Le protocole de lancer est le suivant : on choisit une des deux pièces au hasard, et on effectue le premier lancer avec la pièce choisie. Si le résultat est pile, on rejoue avec la même pièce, sinon, on change pour le lancer suivant.

On itère ce processus jusqu'au n^e lancer en conservant la même pièce tant que le lancer donne pile et en changeant de pièce pour le lancer suivant lorsqu'on obtient face.

On note C_1 l'événement « choisir la pièce 1 au premier lancer » et C_2 l'événement « choisir la pièce 2 au premier lancer ». On a : $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = \frac{1}{2}$.

Partie A - Étude d'une série de deux lancers

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$, et on s'intéresse ainsi à une série de 2 lancers.

Q30. Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?

Éléments de réponse: On désigne par E_1 l'événement « le second lancer a été effectué avec la pièce 1 ».
On a que $E_1 = (C_1 \cap P_1) \cup (C_2 \cap F'_1)$, cette union étant disjointe. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &\underset{\substack{\text{Union}\\ \text{disjointe}}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cap P_1) + \mathbb{P}(C_2 \cap F'_1) \\ &= \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(F_1) + \mathbb{P}(C_2) \times \mathbb{P}_{C_2}(F'_1) \\ &= \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2}(1 - p_2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + p_1 - p_2) \end{aligned}$$

□

Q31. On effectue le second lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?

Éléments de réponse: En reprenant les notations de la question précédente, il s'agit de déterminer $\mathbb{P}_{E_1}(C_2)$.

On a directement que : $$\begin{aligned} \mathbb{P}_{E_1}(C_2) &= \frac{\mathbb{P}(C_2 \cap E_1)}{\mathbb{P}(E_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(C_2 \cap F'_1)}{\mathbb{P}(E_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_2}(F'_1)}{\mathbb{P}(E_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 - p_2)}{\frac{1}{2}(1 + p_1 - p_2)} \\ &= \frac{1 - p_2}{1 + p_1 - p_2} \end{aligned}$$ □

Partie B - Étude d'une série de 6 lancers

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$, et on s'intéresse à une série de 6 lancers.

Q32. On suppose dans cette question que la pièce 1 a été choisie pour le premier lancer.
On note A l'événement « Obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1, puis deux fois pile avec la pièce 2 ».
Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction des données p_1 et p_2.

Éléments de réponse: Avec les notations de l'énoncé, on a : $A = P_1 \cap F_2 \cap P'_3 \cap P'_4$.
On peut supposer les résultats des lancers successifs de chaque lancers indépendants entre eux. Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P'_3 \cap P'_4) \\ &= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P'_3) \times \mathbb{P}(P'_4) \\ &= p_1 \times (1 - p_1) \times p_2 \times p_2 \\ &= p_1 (1 - p_1) p_2^2 \end{aligned}$$

□

Q33. On suppose dans cette question que la pièce 2 a été choisie pour le premier lancer.
On note B l'événement « jouer cinq fois de suite avec la pièce 2, puis jouer le 6e lancer avec la pièce 1 ».
Déterminer $\mathbb{P}(B)$ en fonction des données p_1 et p_2.

Éléments de réponse: Avec les notations de l'énoncé, on a : $B = P'_1 \cap P'_2 \cap P'_3 \cap P'_4 \cap F'_5$ puisque le résultat du 5e jet doit être un face pour changer de pièce pour le 6e lancer.
Avec les mêmes arguments d'indépendance que précédemment, on en déduit que $\mathbb{P}(B) = p_2^4 (1 - p_2)$. □

Q34. Sachant que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer les deux lancers suivants avec deux pièces différentes ?

Éléments de réponse: On désigne par E_2 l'événement « on joue les deux lancers suivants avec deux pièces différentes », sous-entendu les deuxième et troisième lancers, ce qui donne avec les notations de l'énoncé $E_2 = F_2 \cup F'_2$.

On cherche donc $\mathbb{P}_{C_1}(E_2)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{C_1}(E_2) &= \frac{\mathbb{P}(C_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(C_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left((C_1 \cap F_2) \cup (C_1 \cap F_2')\right)}{\mathbb{P}(C_1)} \\
&\underset{\substack{\text{Union}\\\text{disjointe}}}{=} \frac{\mathbb{P}(C_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap F_2')}{\mathbb{P}(C_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(C_1 \cap P_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap F_1 \cap F_2')}{\mathbb{P}(C_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(P_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(F_1 \cap F_2')}{\mathbb{P}(C_1)} \\
&\underset{\substack{\text{Indépendance dès lors}\\\text{que la pièce est choisie}}}{=} \frac{\mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(P_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(F_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(F_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(F_2')}{\mathbb{P}(C_1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} p_1 q_1 + \frac{1}{2} q_2 p_2}{\frac{1}{2}} \\
&= p_1 q_1 + q_1 q_2 \\
&= (1-p_1)(1+p_1-p_2)
\end{aligned}$$

□

Q35. Quelle est la probabilité d'effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ?

Éléments de réponse: On note E_3 l'événement « on effectue les 3 premiers lancers avec la même pièce ».

On a donc $E_3 = (C_1 \cap P_1 \cap P_2) \cup (C_2 \cap P_1' \cap P_2')$, cette union étant disjointe. Par le même argument d'indépendance des résultats dès lors que la pièce est choisie pour le lancer, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_3) &= \mathbb{P}\left((C_1 \cap P_1 \cap P_2) \cup (C_2 \cap P_1' \cap P_2')\right) \\
&= \mathbb{P}(C_1 \cap P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(C_2 \cap P_1' \cap P_2') \\
&= \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(C_2) \times \mathbb{P}_{C_2}(P_1' \cap P_2') \\
&= \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(P_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(P_2) + \mathbb{P}(C_2) \times \mathbb{P}_{C_2}(P_1') \times \mathbb{P}_{C_2}(P_2') \\
&= \frac{1}{2} \times p_1 \times p_1 + \frac{1}{2} \times p_2 \times p_2 \\
&= \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2
\end{aligned}$$

□

Partie C - Un jeu à partir d'une série de n lancers

Dans cette partie, on s'intéresse à une série de n lancers où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

On note D_n l'événement « on utilise la pièce 1 pour la première fois au n^e lancer ».

Q36. Déterminer $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra distinguer les cas $n = 1$ et $n > 1$.

Éléments de réponse: Par définition, D_1 est réalisé, si et seulement si C_1 est réalisé, et donc $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(C_1)$, c'est à dire $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{2}$.

Pour $n \geq 2$, on a : $D_n = C_2 \cap P_1' \cap \ldots \cap P_{n-2}' \cap F_{n-1}'$

On en déduit donc que : $\forall n \geq 2, \mathbb{P}(D_n)$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(C_2 \cap P_1' \cap \ldots \cap P_{n-2}' \cap F_{n-1}'\right) \\
&= \mathbb{P}_{C_2}\left(P_1' \cap \ldots \cap P_{n-2}' \cap F_{n-1}'\right) \\
&\underset{\substack{\text{Indépendance dès lors}\\\text{que la pièce est choisie}}}{=} \mathbb{P}(C_2) \times \mathbb{P}_{C_2}(P_1') \times \mathbb{P}_{C_2}(P_2') \times \ldots \times \mathbb{P}_{C_2}(P_{n-2}') \times \mathbb{P}_{C_2}(F_{n-1}') \\
&= \frac{1}{2} \times \underbrace{p_2 \times \ldots \times p_2}_{n-2 \text{ facteurs}} \times q_2 \\
&= \frac{1}{2} p_2^{n-2} q_2
\end{aligned}$$

□

Q37. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(D_n)$ converge, et calculer sa somme.

Éléments de réponse: La série numérique $\sum \mathbb{P}(D_n)$ et la série numérique $\frac{1}{2} q_2 \frac{1}{p_2^2} \sum p_2^n$ sont de même nature. Or la série numérique $\sum p_2^n$ est une série géométrique telle que $|p_2| < 1$, donc par théorème est convergente. D'où la série $\sum \mathbb{P}(D_n)$ est convergente.

$$\begin{aligned}
\text{Par ailleurs :}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(D_n) &= \mathbb{P}(D_1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}(D_n)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}q_2\sum_{n=2}^{+\infty}p_2^{n-2}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}q_2\sum_{k=0}^{+\infty}p_2^{k}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{q_2}_{=1-p_2}\times\frac{1}{1-p_2}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Q38. En supposant que l'on puisse effectuer une infinité de lancers, quelle est la probabilité de l'événement « ne jamais utiliser la pièce 1 »

Éléments de réponse: On cherche donc à déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(D_n)$. Or la série $\sum\mathbb{P}(D_n)$ étant convergente, nécessairement son terme général $\mathbb{P}(D_n)$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, la probabilité de ne jamais utiliser la pièce 1 est nulle. □

Dans toute la suite du problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

On considère alors l'expérience aléatoire suivante : on effectue N lancers selon le protocole étudié précédemment. On gagne 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 1, et on perd 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 2.

La variable aléatoire X_N désigne le nombre de points obtenus à l'issue de N lancers. X_N peut donc prendre des valeurs entières $k\in[\![-N;N]\!]$.

La variable aléatoire U_N désigne le nombre de fois où l'on joue avec la pièce 1 au cours des N lancers.

Q39. Déterminer $\mathbb{P}([X_N=N])$ et $\mathbb{P}([X_N=-N])$.

Éléments de réponse: Par définition : $[X_N=N]=C_1\cap P_1\cap\ldots\cap P_{n-1}$ et $[X_N=-N]=C_2\cap P_1'\cap\ldots\cap P_{N-1}'$.

Par des arguments et des calculs analogues à ceux de la question Q36, on en déduit que $\mathbb{P}([X_N=N])=\frac{1}{2}p_1^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N=-N])=\frac{1}{2}p_2^{N-1}$.

□

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $p_1=p_2=\dfrac{3}{10}$.

Q40. Dans cette question uniquement, on suppose que N = 3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3, puis son espérance $\mathbb{E}(X_3)$.

Éléments de réponse: Le support de X_3 est donc $\{-3,-1,1,3\}$. D'après la question Q40, on sait que $\mathbb{P}([X_3=3])=\frac{1}{2}p_1^2$ et $\mathbb{P}([X_3=-3])=\frac{1}{2}P_2^2$.

Comme $[X_3=3]=(C_1\cap P_1\cap F_2)\cup(C_1\cap F_1\cap F_2')\cup(C_2\cap F_1'\cap P_2)$, par un raisonnement analogue, il vient que :

$$\mathbb{P}([X_3=1])=\frac{1}{2}(p_1q_1+q_1q_2+q_2p_1)\text{ et de même }\mathbb{P}([X_3=-1])=\frac{1}{2}(q_1p_2+p_2q_2+q_2p_1).$$

Par suite, en prenant $p_1=p_2=\dfrac{3}{10}$:

x_i	-3	-1	1	3
$\mathbb{P}([X=x_i])$	$\frac{9}{200}$	$\frac{91}{200}$	$\frac{91}{200}$	$\frac{9}{200}$

$$\begin{aligned}
\text{Par suite il vient :}\quad \mathbb{E}(X) &= -3\times\frac{9}{200}+(-1)\times\frac{91}{200}+1\times\frac{91}{200}+3\times\frac{9}{200}\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Dans toute la fin de cette partie, on suppose que N ≥ 2.

Q41. Soit $k\in[\![-N;N]\!]$. Exprimer l'événement $[X_N=k]$ en fonction de U_N.

Éléments de réponse: U_N étant le nombre de fois que l'on joue avec la pièce 1, on a donc joué $N-U_N$ fois avec la pièce 2. Ainsi, le nombre de points obtenus X_N est égal à $1\times U_N+(-1)\times(N-U_N)$, c'est à dire $X_N=2U_N-N$.

Par conséquent, pour tout $k\in[\![-N;N]\!]$, $[X_N=k]=\left[U_N=\dfrac{N+k}{2}\right]$ □

Q42. En déduire $\mathbb{P}([X_N=N-1])$.

Éléments de réponse: D'après la question Q42, on a : $\mathbb{P}\left(\left[X_N = N-1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U_N = \dfrac{2N-1}{2}\right]\right)$.

Or $\dfrac{2N-1}{2}$ n'est pas entier, donc $\mathbb{P}\left(\left[U_n = \dfrac{2N-1}{2}\right]\right) = 0$ et $\mathbb{P}\left(\left[X_N = N-1\right]\right) = 0$ □

Q43. Que vaut $\mathbb{P}([X_N = 0])$ lorsque N est un entier impair ?

Éléments de réponse: Si N et impair, sur le même principe, on a $\mathbb{P}\left(\left[X_N = 0\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U_N = \dfrac{N}{2}\right]\right) = 0$. □

Q44. Déterminer $\mathbb{P}([X_N = N-2])$ et $\mathbb{P}([X_N = -N+2])$.

Éléments de réponse: On remarque dans un premier temps que : $\mathbb{P}\left(\left[X_N = N-2\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U_N = N-1\right]\right)$.
Or jouer $N-1$ fois avec la pièce 1 nécessite

— soit commencer à choisir la pièce 2, faire face avec cette pièce pour changer de pièce, et faire ensuite $N-2$ piles avec la pièce 1 ;

— soit commencer à choisir la pièce 1, puis au cours des $N-1$ lancers qui suivent, on fait 2 faces successives, l'une avec la pièce 1 et l'autre avec la pièce 2, et les $N-3$ lancers restants de cette série de $N-1$ lancers étant des piles réalisés avec la pièce 1.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}\left(\left[X_N = N-2\right]\right) = \dfrac{1}{2} q_2 p_1^{N-2} + \dfrac{1}{2}\binom{N-1}{2} q_1 q_2 p_1^{N-3}$.

De plus, $\mathbb{P}\left(\left[X_N = -N+2\right]\right) = \mathbb{P}([U_n = 1])$ qui donnera $\mathbb{P}\left(\left[X_N = N-2\right]\right) = \dfrac{1}{2} q_1 p_2^{N-2} + \dfrac{1}{2}\binom{N-1}{2} q_2 q_1 p_2^{N-3}$. □