Annexe C :
Révisions sur les fonctions réelles (TSI 1)
Corrigé des exercices

1) Exercices de cours

I désigne un intervalle réel (non vide et non réduit à un point).

Corrigé de l'exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Les restrictions de f à $]-\infty; 0[$ et à $]0; +\infty[$ sont identiquement nulles, donc f possède une limite nulle à gauche et à droite en 0 :

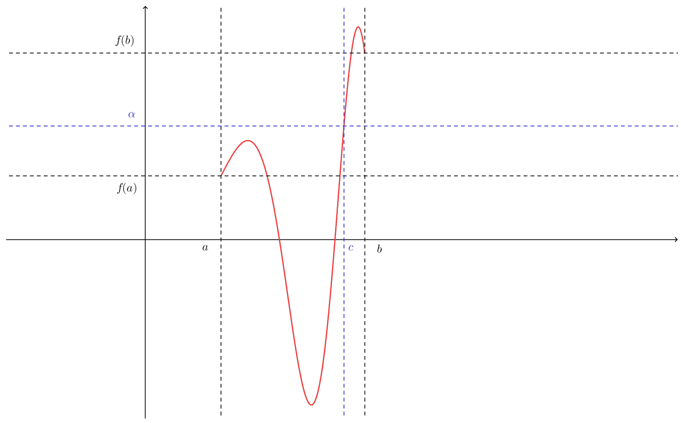
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Mais f ne possède pas de limite en 0 : sinon, cette limite serait forcément nulle (égale aux limites à gauche et à droite), et on aurait donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in [-\delta, \delta] \Longrightarrow f(x) \in [-\varepsilon; \varepsilon]).$$

Et il se trouve que le contraire est vrai : il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ (par exemple $\varepsilon_0 = 1/2$) tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x \in [-\delta; \delta]$ et $f(x) \notin [\varepsilon_0; \varepsilon_0]$ ($x_0 = 0$ convient puisque $0 \in [-\delta; \delta]$ et $f(0) = 1 \notin [-1/2; 1/2]$).
Bien retenir que la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A$ et (non B)).

Corrigé de l'exercice 2. 1. *Théorème des valeurs intermédiaires : si $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est continue et si α est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \alpha$.*



2. *Reprenons l'exemple de l'exercice précédent : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.*
$\mathbb{R}$ est bien un intervalle, mais $f(\mathbb{R}) = \{0; 1\}$ n'est pas un intervalle, puisque $0 < 1/2 < 1$ et $1/2 \notin f(\mathbb{R})$.
Bien entendu, cette fonction est discontinue...

Corrigé de l'exercice 3.
Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
On a $f([0; 1]) = \{f(0)\} \cup f(]0; 1]) = \{1\} \cup [1; +\infty[= [1; +\infty[$, donc $f([0; 1])$ est bien un intervalle qui n'est pas un segment.
Bien entendu, cette fonction est discontinue...

Corrigé de l'exercice 4. 1. *La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ ($|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$).*

- *On a* $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$*, donc* $x \mapsto |x|$ *est continue en* 0.
- *On a* $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$ *, donc le taux d'accroissement* $x \mapsto \frac{|x|-|0|}{x-0}$ *ne possède pas de limite en* 0*, ce qui montre que* $x \mapsto |x|$ *n'est pas dérivable en* 0.
  Interprétation graphique : le graphe de $x \mapsto |x|$ *possède deux demi-tangentes à droite et à gauche de pentes respectives* 1 *et* -1 *en* 0*, car la fonction* $x \mapsto |x|$ *est quand même dérivable à droite et à gauche en* 0*, mais pas dérivable en ce point.*

2. *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est définie sur* $[0; +\infty[$.
   - *On a* $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$*, donc* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue en* 0.
   - *Pour tout* $x > 0$*, on a* $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$*, donc* $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$*, ce qui montre que* $x \mapsto \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable en* 0.
     Interprétation graphique : le graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$ *possède une demi-tangente à droite verticale, car le taux d'accroissement a une limite infinie.*

Corrigé de l'exercice 5. *1. Par exemple, la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^3$ *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $\mathbb{R}$*, elle ne possède pas d'extremum local en* 0 *(puisqu'elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*), et pourtant on a bien* $f'(0) = 0$*, puisque*

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3-0^3}{x-0} = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Par exemple, si on considère la fonction* $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x$ *: cette fonction est bien dérivable (de fonction dérivée* $x \mapsto 1$*), sa dérivée ne s'annule jamais, et pourtant* f *possède un minimum local (et même global) en* 0*, puisque :*

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = x \geq f(0) = 0.$$

Remarque : en fait, pour tout $\delta > 0$*, on a ici* $[0-\delta, 0+\delta] \cap I = [0; \min(\delta, 1)]$ *puisque* 0 *est l'extrémité gauche de* $I = [0; 1]$ *(la restriction de* $x \mapsto x$ *à* $[0; 1]$ *supprime la partie* $[0-\delta, 0[$ *dans la définition de l'extremum local).*

Corrigé de l'exercice 6. • *Tout d'abord, il est clair que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *(par produit et composée de fonctions dérivables), et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

- *Ensuite,* f *est continue en* 0 *puisque* $\lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x) = 0 = f(0)$ *(produit d'une fonction qui tend vers* 0 *par une fonction bornée).*
- *On a même* f *qui est dérivable en* 0 *puisque* $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ *(produit d'une fonction qui tend vers* 0 *par une fonction bornée). On a donc* $f'(0) = 0$.
- *Mais la fonction dérivée* f' *ne possède pas de limite en* 0*, puisque* $\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *et* $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *ne possède pas de limite en* 0 *(sinon,* $\cos(y)$ *aurait une limite lorsque* $y \to +\infty$*, ce qui est absurde car la suite* $(\cos(n\pi)) = ((-1)^n)$ *est divergente).*

En résumé, la fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, mais sa dérivée* f' *ne possède pas de limite en* 0.

Corrigé de l'exercice 7.
Rappelons la définition d'un développement limité :
On dit que la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ *possède un développement limité d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *au voisinage du point* $a \in D$ *s'il existe* $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

1. *Lien entre dérivabilité et développements limités : soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(non vide et non réduit à point), soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *et soit* $a \in I$*. Alors,* f *est dérivable en* a *si et seulement si* f *possède un DL d'ordre* 1 *au voisinage de* a*. Dans ce cas, ce DL est* $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{o}((x-a))$.

2. *Puisque* $x^2\sin(1/x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ *(produit d'une fonction qui tend vers* 0 *par une fonction bornée) et puisque* $f(x) = x^3\sin(1/x)$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$*, on en déduit que* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$*. On en déduit que* f *possède un DL d'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *:*

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

3. *Puisque* f *possède un DL d'ordre* 1 *au voisinage de* 0 *(à coefficients nuls), on déduit de la question 1. et de l'unicité d'un DL que* f *est dérivable en* 0 *avec* $f'(0) = 0$*.*
En outre, f *est clairement dérivable en tout point* $x \in \mathbb{R}^*$ *(par produit et composition de fonctions dérivables), et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le taux d'accroissement de f' *en* 0 *vaut donc :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

et cette quantité ne possède pas de limite finie en 0 *(somme d'une fonction de limite nulle et d'une fonction ne possédant pas de limite). Donc* f' *n'est pas dérivable en* 0*, ce qui montre que* f *n'est pas deux fois dérivable en* 0*.*

Cet exercice montre qu'une fonction qui possède un DL d'ordre 2 *au voisinage de* a *n'est pas forcément deux fois dérivable en* a*.*

2) Exercices concrets

Corrigé de l'exercice 8. • *Tout d'abord,* f *est clairement continue en tout point* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ *(puisque les restrictions de* f *aux intervalles* $]-\infty; -2[$, $]-2, 2[$ *et* $]2; +\infty[$ *sont des polynômes.*

- *Etudions* f *au voisinage de* -2 *:*

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (x^2 + 3x + a) = a - 2,$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (2x - 1) = -5,$$

donc f *est prolongeable par continuité en* -2 *si et seulement* $a - 2 = -5$*, c'est-à-dire* $a = -3$*.*
Dans ce cas, le prolongement $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *est défini par* $f_1(x) = f(x)$ *si* $x \notin \{-2; 2\}$ *et* $f_1(-2) = -5$*.*

- *Etudions* f *au voisinage de* 2 *:*

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x - 1) = 3,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 + 3x + a) = 10 + a,$$

donc f *est prolongeable par continuité en* 2 *si et seulement* $a + 10 = 3$*, c'est-à-dire* $a = -7$*.*
Dans ce cas, le prolongement $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ *est défini par* $f_2(x) = f(x)$ *si* $x \notin \{-2; 2\}$ *et* $f_2(2) = 3$*.*

Bilan :

- *si* $a = -3$*,* f *est prolongeable par continuité en* -2 *;*
- *si* $a = -7$*,* f *est prolongeable par continuité en* 2 *;*
- *sinon,* f *n'est pas prolongeable par continuité.*

On remarque que quelle que soit la valeur de a*, on ne peut jamais prolonger* f *par continuité sur tout* $\mathbb{R}$*.*

Corrigé de l'exercice 9.
Rappelons que la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *est définie de la façon suivante : pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $E(x)$ *est l'unique entier relatif tel que* $E(x) \leq x < E(x) + 1$*.*

- *Puisque* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - E(x) \geq 0$ *et que* $\sqrt{\ }$ *est définie sur* $[0;+\infty[$, *on en déduit que* f *et* g *sont définies sur* $\mathbb{R}$.
- E *est continue en tout point* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *et* $\sqrt{\ }$ *est continue sur* $[0;+\infty[$, *donc par somme et composition, les fonctions* f *et* g *sont continues en tout point* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- *Etude de* f *au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{Z}$ *: étant donné un entier relatif* x_0, *on a*

$$f(x) = x + \sqrt{x - E(x)} = \begin{cases} x + \sqrt{x - x_0} & \text{si } x \in]x_0; x_0 + 1[\\ x + \sqrt{x - (x_0 - 1)} & \text{si } x \in]x_0 - 1; x_0[\end{cases},$$

donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = x_0 = f(x_0)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = x_0 + 1 \neq f(x_0)$.
Puisque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$, *on en déduit que* f *est continue à droite en* x_0, *mais pas à gauche. Donc* f *n'est pas continue en* $x_0 \in \mathbb{Z}$.
- *Etude de* g *au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{Z}$ *: étant donné un entier relatif* x_0, *on a*

$$g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)} = \begin{cases} x_0 + \sqrt{x - x_0} & \text{si } x \in]x_0; x_0 + 1[\\ x_0 - 1 + \sqrt{x - (x_0 - 1)} & \text{si } x \in]x_0 - 1; x_0[\end{cases},$$

donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = x_0 = g(x_0)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = x_0 - 1 + \sqrt{1} = x_0 = g(x_0)$.
Puisque $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$, *on en déduit que* g *est continue en* $x_0 \in \mathbb{Z}$.

En définitive, g *est continue sur* $\mathbb{R}$, *alors que* f *non.*

Corrigé de l'exercice 10.
On a $f(x) = \exp(g(x))$ *avec*

$$g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Puisque $\exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$ *est une bijection strictement croissante, il suffit d'étudier la fonction* g *pour en déduire les propriétés de la fonction* f.

- **Ensemble de définition :** *La quantité* $g(x)$ *est définie lorsque* $\frac{x+1}{x} > 0$, *ce qui équivaut à* $x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ *(faire un tableau de signes). Puisque* $\exp$ *est définie sur* $\mathbb{R}$, *on en déduit que l'ensemble de définition de* f *est* $\boxed{D =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[.}$
- **Continuité et dérivabilité de** f **:** *Par produit et composition,* f *est clairement dérivable (et donc continue) en tout point* $x \in D$.
- **Calcul des limites aux bornes de** D **:**
  * *En* $+\infty$ *: puisque* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, *on a* $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, *donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
    On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \exp(1) = e}$.
  * *En* $-\infty$ *: cela se passe exactement comme en* $-\infty$ *(puisque* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$*).*
    On a $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e}$.
  * *En* -1^- *: puisque* $\lim\limits_{x \to -1^-} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$, *on en déduit que* $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$, *donc par composition,* $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty}$.
  * *En* 0^+ *: pour lever la forme indéterminée* "$0 \times \infty$" *dans l'expression de* g, *on réécrit :*

$$\forall x > 0, \quad g(x) = x\left(\ln(1+x) - \ln(x)\right).$$

Il est alors facile d'obtenir un équivalent simple de g *en* 0 *:* $\ln(1+x)$ *(qui tend vers* 0*) est négligeable devant* $-\ln(x)$ *(qui tend vers* $+\infty$*), donc* $\ln(1+x) - \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x)$, *et par produit :*

$$g(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -x\ln(x).$$

Par croissances comparées, on obtient alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$*, donc par composition :*
$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1}$.

- **Prolongement de f :** *Puisque f possède une limite finie en 0^+, la fonction f admet un prolongement continu $\tilde{f} :]-\infty;-1[\cup[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ (en posant $\tilde{f}(0) = \lim\limits_{0^+} f = 1$). Mais ce prolongement $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0 : en effet*

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{g(x)} - 1}{x},$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$*, on a le développement limité :*

$$\forall x > 0, \quad \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{1 + g(x) + o(g(x)) - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{g(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-x\ln(x)}{x} = -\ln(x),$$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = +\infty$.

- **Etude des variations :** *Etudions seulement les variations de g, qui est dérivable sur D. On en déduira aisément les variations de f (par composition avec* $\exp$*).*

$$\forall x \in D, \quad g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x * \left(\frac{-1/x^2}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

L'étude du signe de g' n'étant pas évidente, on va étudier la dérivée seconde g'' (qui existe car g' est clairement dérivable sur D).

$$\forall x \in D, \qquad g''(x) = \frac{-1/x^2}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

La fonction g'' est donc du signe de $-x$, ce qui permet de dresser le tableau de variations de g' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$				$-$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$				$\searrow$	0

Vu que $\lim\limits_{\pm\infty} g'(x) = 0$*, on déduit de ce tableau de variations que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in D$. La fonction g est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]0;+\infty[$* **(attention, elle n'est pas strictement croissante sur D, car D n'est pas un intervalle !)**. *Par composition avec* $\exp$ *qui est strictement croissante, on en déduit finalement que*
$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;-1[\text{ et sur }]0;+\infty[.}$ *On peut donc dresser le tableau de variations de f :*

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	e	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	e

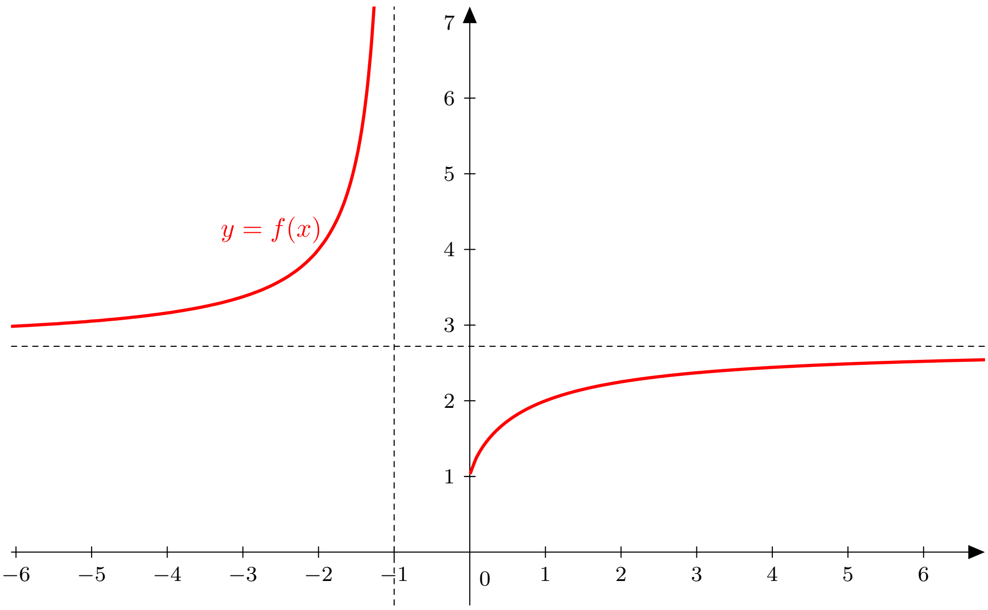
- **Asymptotes :**
  * *Puisque* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$*, la droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale en $+\infty$.*

* *En* $-\infty$, *idem :* $y = e$ *est asymptote horizontale.*

* *Puisque* $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$, *la droite d'équation* $x = -1$ *est asymptote verticale en* $x = -1$.

- **Tangentes :** *Puisque* $\tilde{f}$ *est continue en* 0 *et que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = +\infty$, *on en déduit que le graphe de* $\tilde{f}$ *possède une demi-tangente verticale au point* $(0;1)$.

- **Allure de la courbe :**



Corrigé de l'exercice 11. • **Ensemble de définition :** *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1+\sin x}{2} \in [0;1]$ *et* $\frac{1+\cos x}{2} \in [0;1]$, *donc* $\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$ *et* $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ *existent et appartiennent à* $[0;1]$. *Puisque* arccos *et* arcsin *sont définies sur* $[-1;1]$, *on en déduit que* $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

- **Périodicité :** *Puisque* sin *et* cos *sont* 2π*-périodiques, on en déduit par composition que* $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$. $\boxed{\text{Il suffit donc d'étudier } f \text{ sur } [-\pi;\pi]}$, *et de translater la portion de courbe correspondante pour obtenir le graphe complet de* f.
f n'est ni paire ni impaire donc on ne peut davantage réduire le domaine d'étude.

- **Continuité et dérivabilité :** *Puisque* arccos, arcsin, $\sqrt{\ }$, sin *et* cos *sont continues sur leur domaine de définition, on en déduit par composition que* $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
En revanche arccos *et* arcsin *ne sont pas dérivables en* -1 *et* 1, *et* $\sqrt{\ }$ *n'est pas dérivable en* 0, *donc, par composition,* f *est dérivable en tout point* $x \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{1+\sin(x)}{2} \in]0;1[\quad \text{et } \frac{1+\cos(x)}{2} \in]0;1[,$$

c'est-à-dire

$$\sin(x) \in]-1;1[\quad \text{et } \cos(x) \in]-1;1[.$$

Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable en tout point } x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]}$.

- **Etude des variations :** *Etudions le signe de la dérivée de* f *sur l'ensemble*

$$D' = [-\pi;\pi] \setminus \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} =]-\pi;\pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Pour tout $x \in D'$, nous avons :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1+\sin(x)}{2}}} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1+\cos(x)}{2}}} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sin(x)}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\cos(x)}} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right) \\
&= \frac{-\cos(x)}{2\sqrt{1-\sin^2(x)}} + \frac{\sin(x)}{2\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(x)}{|\cos(x)|} + \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}\right).
\end{aligned}$$

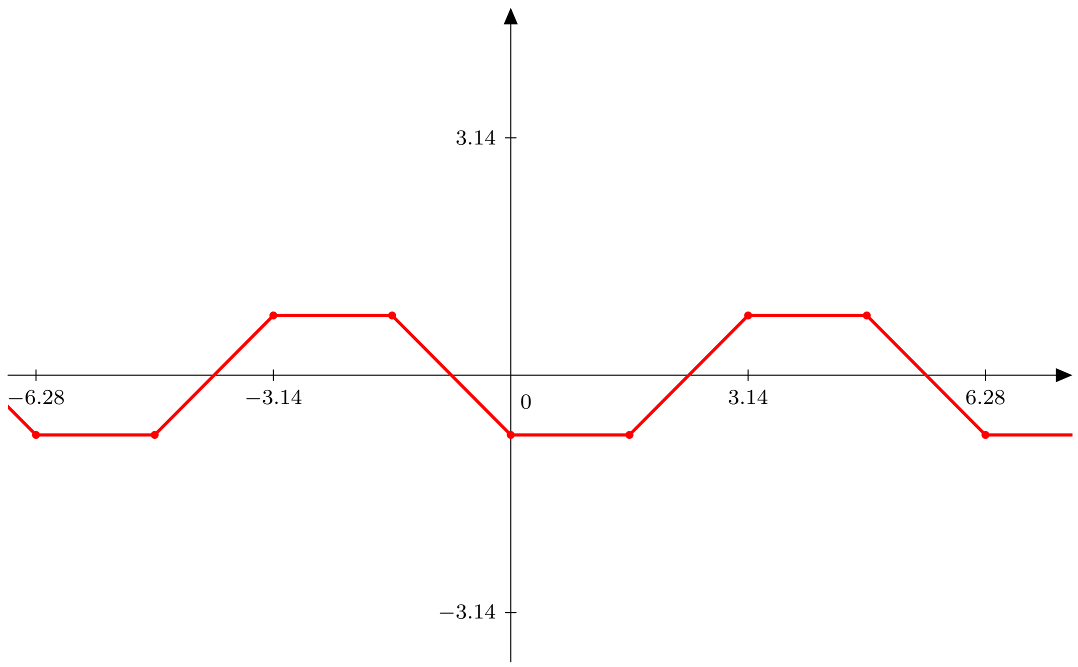
La dérivée de f est donc constante par morceaux :

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

On en déduit que f est affine par morceaux. Vu que f est également continue sur $\mathbb{R}$, il est donc facile de dresser son tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$, en calculant les valeurs de f aux points remarquables :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

- **Allure de la courbe :**



Remarque : l'allure de la courbe montre clairement que f n'est pas dérivable aux points $x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ("points anguleux").

Corrigé de l'exercice 12. • *Par composition, f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \backslash \{0\} = [-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}]$ (quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas).*

- *Montrons que f est dérivable en 0 :*

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-\sin(x)}{x^2\sin(x)}.$$

$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc $x-\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3}{6}$ et $x^2\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x^3$. Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3}=\frac{1}{6}$, ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{6}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{6}$.

- *Montrons que la fonction dérivée f' est continue en 0 :*

$$\forall x\in I\setminus\{0\},\quad f'(x)=\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2\cos(x)+\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$

Le dénominateur $x^2\sin^2(x)$ est équivalent à x^4 lorsque $x\to 0$. Pour calculer $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$, on effectue donc un DL d'ordre 4 du numérateur (mais il suffit de développer $\cos(x)$ à l'ordre 2 puisqu'il y a x^2 en facteur) :

$$-x^2\cos(x)+\sin^2(x)=-x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{6}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

donc

$$-x^2\cos(x)+\sin^2(x)=\frac{1}{6}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{6}x^4,$$

ce qui montre que $f'(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\frac{1}{6}$. On a finalement $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\frac{1}{6}=f'(0)$, donc f' est continue en 0.

On a bien montré que f' existe et est continue sur I, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Corrigé de l'exercice 13.

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $u(x)=x^2-3x+5$ et $v(x)=e^{3x}$. Les fonctions u,v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$u^{(k)}(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & si\ k=0\\ 2x-3 & si\ k=1\\ 2 & si\ k=2\\ 0 & si\ k\geq 3\end{cases},\qquad v^{(k)}(x)=3^ke^{3x}.$$

Donc le produit $f=uv$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}3^k\right)e^{3x}.$$

Le facteur $u^{(n-k)}(x)$ est nul dès que $n-k>2$, il ne reste donc dans la somme que les termes d'indices $k\geq n-2$. Plusieurs cas se présentent alors :

- *Si $n\geq 2$, alors il ne reste que les termes d'indices $k\in\{n-2,n-1,n\}$, donc*

$$f^{(n)}(x)=\left(\binom{n}{n-2}u''(x)3^{n-2}+\binom{n}{n-1}u'(x)3^{n-1}+\binom{n}{n}u(x)3^n\right)e^{3x},$$

c'est-à-dire

$$f^{(n)}(x)=\left(n(n-1)3^{n-2}+n(2x-3)3^{n-1}+(x^2-3x+5)3^n\right)e^{3x}.$$

- *Si $n=1$, on a simplement $f^{(1)}(x)=f'(x)=(2x-3)e^{3x}+(x^2-3x+5)3e^{3x}=(3x^2-7x+12)e^{3x}$.*
- *Si $n=0$, on a $f^{(0)}(x)=f(x)=(x^2-3x+5)e^{3x}$.*

On remarque que la formule $f^{(n)}(x)=\left(n(n-1)3^{n-2}+n(2x-3)3^{n-1}+(x^2-3x+5)3^n\right)e^{3x}$ reste en fait valable lorsque $n\in\{0,1\}$. On en conclut que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\qquad f^{(n)}(x)=\left(n(n-1)3^{n-2}+n(2x-3)3^{n-1}+(x^2-3x+5)3^n\right)e^{3x}.$$

Corrigé de l'exercice 14. *1. Etant polynomiale, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur le segment $[-1;1]$: on a $f(1)=5$ et $f(-1)=-5$, donc $0 \in [f(-1);f(1)]$, donc il existe $c \in [-1;1]$ tel que $f(c)=0$. De plus, $c \notin \{-1;1\}$ car $f(-1) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, donc $c \in]-1;1[$. L'équation $f(x)=0$ possède donc au moins une solution dans $]-1;1[$.*

2.
- *Si $x \geq 1$, alors $x^5 \geq x^2$, donc $4x^5 - x^2 \geq 3x^5$, d'où $f(x) \geq 3x^5 + x + 1 \geq 3+1+1 = 5$. On a donc $f(x) \geq 5$, ce qui montre que f ne s'annule pas sur l'intervalle $[1;+\infty[$.*
- *Si $x \leq -1$, alors $f(x) = 4x^5 - x^2 + \underbrace{x+1}_{\leq 0} \leq 4x^5 - x^2 \leq 4x^5 \leq -4$. On a donc $f(x) \leq -4$, ce qui montre que f ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty,-1]$.*

On a bien montré que la fonction f ne s'annule pas en dehors de l'intervalle $]-1;1[$.

Corrigé de l'exercice 15.
Suivons l'indication, et posons $\varphi(x) = f(x) - \alpha(x-a)(x-b)$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$ (comme f), et pour tout $x \in [a;b]$:

$$\varphi'(x) = f'(x) + (a+b-2x)\alpha,$$

$$\varphi''(x) = f''(x) - 2\alpha.$$

On a $\varphi(a) = f(a) = 0$, $\varphi(b) = f(b) = 0$, ainsi que $\varphi(x_0) = f(x_0) - \alpha(x_0-a)(x_0-b)$.
Choisissons alors α pour avoir $\varphi(x_0) = 0$:

$$\varphi(x_0) = 0 \iff \alpha = \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}.$$

Avec ce choix de α (possible car $a < x_0 < b$), on a $\varphi(a) = \varphi(x_0) = \varphi(b)$, donc d'après le théorème de Rolle (qui s'applique à φ sur les segments $[a;x_0]$ et $[x_0;b]$), il existe $c_1 \in]a;x_0[$ et $c_2 \in]x_0;b[$ tels que $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$. On réapplique alors le théorème de Rolle à φ' (qui est bien dérivable sur le segment $[c_1;c_2]$) : il existe $x_1 \in]c_1;c_2[\subset]a;b[$ tel que $\varphi''(x_1) = 0$, c'est-à-dire $f''(x_1) = 2\alpha$.
On a finalement $0 = \varphi(x_0) = f(x_0) - \frac{f''(x_1)}{2}(x_0-a)(x_0-b)$, ce qu'il fallait montrer.

Corrigé de l'exercice 16. *1.*
- *Posons $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$. La fonction f étant dérivable sur $[0;+\infty[$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre les points 0 et x (pour $x > 0$ fixé) :*

$$f(x) - f(0) \leq \left(\sup_{t \in]0;x[} f'(t)\right) \times (x-0),$$

c'est-à-dire

$$\ln(1+x) \leq \left(\sup_{t \in]0;x[} \frac{1}{1+t}\right) \times x = x.$$

- *Posons $g(x) = e^x$ pour $x \leq 0$. La fonction g étant dérivable sur $]-\infty;0]$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à g entre les points x et 0 (pour $x < 0$ fixé) :*

$$g(0) - g(x) \leq \left(\sup_{t \in]x;0[} g'(t)\right) \times (0-x),$$

c'est-à-dire

$$1 - e^x \leq \left(\sup_{t \in]x;0[} e^t\right) \times (-x) = -x,$$

ou encore

$$e^x \geq 1 + x.$$

2. *L'idée est de minorer f par une fonction qui tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, et ce grâce à l'égalité des accroissements finis.*
Puisque $\lim_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$, il existe $a > 0$ tel que $t \geq a \Longrightarrow f'(t) \geq 1$. Fixons alors $x > a$:

d'après l'égalité des accroissements finis (qui s'applique car f est dérivable sur le segment $[a;x]$), il existe $c \in]a;x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$. Mais $f'(c) \geq 1$ (puisque $c > a$) ; donc $f(x) - f(a) \geq x - a$. Ceci étant vrai pour $x > a$ quelconque, on a donc montré que

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq f(a) + x - a.$$

On conclut alors par le théorème des gendarmes que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 17. *1. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (c'est une fonction rationnelle), et la fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc (par composition) la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.*

2. *Pour tout $x \neq 0$, on a*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},$$

$$f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-1/x^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{8-36x^2+24x^4}{x^9}e^{-1/x^2}.$$

On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que $P_n(0) \neq 0$ et

$$\forall x \neq 0, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}.$$

On vérifie ceci par récurrence sur n, car si

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2},$$

avec $P_n(0) \neq 0$, alors

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}\right) = \frac{x^3P_n'(x) + (2-3nx^2)P_n(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2},$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2},$$

en posant $P_{n+1}(x) = x^3P_n'(x) + (2-3nx^2)P_n(x)$.
De plus, on a $P_{n+1}(0) = 2P_n(0) \neq 0$, ce qui prouve la conjecture.

3. *Puisque $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, la fonction f se prolonge continûment à $\mathbb{R}$ tout entier. Notons $g \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le prolongement continu de f et montrons que $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
Pour cela, on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   - *C'est évident pour $n = 0$, car g est continue (et on a $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$).*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que g soit de classe C^n sur $\mathbb{R}$. On a alors*

$$\forall x \neq 0, \qquad g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2},$$

et par continuité de $g^{(n)}$ en 0, on a

$$g^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0,$$

puisque $g^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{P_n(0)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.
Par la question précédente, on sait que $g^{(n)}$ est dérivable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^*$, et que

$$\forall x \neq 0, \qquad \left(g^{(n)}\right)'(x) = f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}\left(g^{(n)}\right)'(x)=0$*, ce qui montre (d'après le théorème de prolongement de la dérivée), que* $g^{(n)}$ *est dérivable en* 0*, avec*

$$g^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\left(g^{(n)}\right)'(x)=0.$$

La fonction $g^{(n+1)}=\left(g^{(n)}\right)'$ *est donc continue sur* $\mathbb{R}$*, ce qui montre que* $g\in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Par récurrence, on conclut que g *est de classe* C^n *pour tout* n*, et donc que* $g\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. On a montré au passage que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $g^{(n)}(0)=0$.

Corrigé de l'exercice 18. 1. *Au voisinage de* 0*, la fonction* f *est négligeable devant* x^n *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*. En effet :*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{y\to+\infty}y^ne^{-y^2}\sin(e^{y^2})=0,$$

par croissances comparées, car $|y^ne^{-y^2}\sin(e^{y^2})|\leq y^ne^{-y^2}\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}0$ *; et par parité de* f*, on a aussi* $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^n}=0$.

On a donc $f(x)=0+0x+\cdots+0x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, ce qui montre que* f *possède des DL en* 0 *(nuls) à tout ordre.*

2. *Par composition et produit,* f *est clairement de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^*$*, et*

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)-\frac{2}{x^3}\cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{2f(x)}{x^3}-\frac{2}{x^3}\cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right).$$

On en déduit que f' *ne possède pas de limite finie en* 0*, puisque* $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{x^3}=0$ *(voir question précédente), mais* $\frac{2}{x^3}\cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ *ne possède pas de limite finie, sinon* $2y^3\cos(e^{y^2})$ *possèderait une limite finie quand* $y\to+\infty$*, et c'est impossible (la suite* $y_n=\sqrt{\ln(n\pi)}$ *tend vers* $+\infty$ *mais* $2y_n^3\cos(e^{y_n^2})=2(\ln(n\pi))^{3/2}\cos(n\pi)=2(\ln(n\pi))^{3/2}(-1)^n$ *diverge).*

En conclusion, la fonction f *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, donc certainement pas de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Corrigé de l'exercice 19. 1. (a) *Démonstration pour* $n=1$ *: par hypothèse, il existe* $(x_1,x_2)\in[a;b]^2$ *tels que* $x_1<x_2$ *et* $f(x_1)=f(x_2)=0$*. Le théorème de Rolle s'applique alors à* f *(qui est continue sur* $[x_1;x_2]$ *et dérivable sur* $]x_1;x_2[$ *: il existe* $c\in]x_1,x_2[$ *tel que* $f'(c)=0$*, donc* f' *s'annule au moins une fois sur* $]a;b[$.

(b) *Démonstration pour* $n=2$ *: par hypothèse, il existe* $(x_1,x_2,x_3)\in[a;b]^3$ *tels que* $x_1<x_2<x_3$ *et* $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$*. Le théorème de Rolle s'applique alors à* f *sur les intervalles* $[x_1;x_2]$ *et* $[x_2;x_3]$ *: il existe* $c_1\in]x_1;x_2[$ *et* $c_2\in]x_2;x_3[$ *tels que* $f'(c_1)=f'(c_2)=0$*. En réappliquant le théorème de Rolle à* f' *sur l'intervalle* $[c_1;c_2]$*, on en déduit l'existence d'un réel* $c\in]c_1;c_2[$ *tel que* $f''(c)=0$*, donc* f'' *s'annule au moins une fois sur* $]a;b[$.

2. *On a déjà montré que le résultat est vrai pour* $n=1$*. Montrons maintenant qu'il est héréditaire. Fixons* $n\in\mathbb{N}^*$*. On suppose que pour tout intervalle* $[\alpha;\beta]$ *réel et toute fonction* $g:[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}$ n *fois dérivable sur* $]\alpha;\beta[$*, continue sur* $[\alpha;\beta]$*, et qui s'annule* $n+1$ *fois sur* $[\alpha;\beta]$*, on a* $g^{(n)}$ *qui s'annule au moins une fois sur* $]\alpha;\beta[$.
Considérons alors $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ $n+1$ *fois dérivable sur* $]a;b[$*, continue sur* $[a;b]$ *et qui s'annule* $n+2$ *fois sur* $[a;b]$*, en des points* $x_1<\cdots<x_{n+1}<x_{n+2}$*. Le théorème de Rolle s'applique alors à* f *sur les intervalles* $[x_k;x_{k+1}]$ *: pour tout* $k\in\{1,\cdots,n+1\}$*, il existe* $c_k\in]x_k:x_{k+1}[$ *tel que* $f'(c_k)=0$*. Ainsi, la dérivée* f' *s'annule* $n+1$ *fois sur* $[c_1;c_{n+1}]$ *: on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence (car* f' *est continue sur* $[c_1;c_{n+1}]\subset]a;b[$ *et* n *fois dérivable sur* $]c_1;c_{n+1}[\subset]a;b[$*).*
On en conclut que $(f')^{(n)}=f^{(n+1)}$ *s'annule au moins une fois sur* $]c_1,c_{n+1}[\subset]a;b[$.
Le résultat étant vrai pour $n=1$ *et héréditaire, il est vrai pour tout entier* $n\in\mathbb{N}^*$.

Corrigé de l'exercice 20. 1. *Puisque* f *est* T*-périodique, on a* $f(\mathbb{R})=f([0;T])$*. Mais* f *étant continue sur le segment* $[0;T]$*, elle est bornée sur ce segment. On en déduit que* $f([0;T])$ *est un segment de* $\mathbb{R}$*, donc que* $f(\mathbb{R})$ *est un segment, ce qui montre que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$ *(et atteint ses bornes).*

2. *Supposons que* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. *Considérons la suite* $x_n = a + nT$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *fixé (pour* $n \in \mathbb{N}$*). Puisque* $T > 0$, *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, *donc (d'après la caractérisation séquentielle des limites), on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.
   Mais par périodicité, on a $f(x_n) = f(a + nT) = f(a)$, *ce qui montre que* $\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) = \ell$. *On en déduit que* f *est constante sur* $\mathbb{R}$.
3. *Non, puisque* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.