Annexe C : Révisions sur les fonctions réelles (TSI 1)

I Définitions importantes et propriétés de base

1) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1 (Intervalle).
On dit qu'une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un **intervalle** si pour tous x, y dans I et $z \in \mathbb{R}$, on a $(x < z < y \Longrightarrow z \in I)$.

Remarque (Intervalles triviaux).
L'ensemble vide est un intervalle (la condition à vérifier est vide).
Tout singleton $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est un intervalle (pour la même raison).

Proposition 2 (Propriétés des intervalles).

(i) *Tout intervalle contenant au moins deux points distincts en contient une infinité.*

(ii) *Toute intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ (même infinie) est un intervalle de $\mathbb{R}$ (éventuellement vide ou singleton).*

(iii) *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est nécessairement de l'un des types suivants :*

$$\emptyset,\ \{a\},\ ]a;b[,\ [a;b[,\ ]a;b],\ [a;b],\ ]-\infty;b[,\ ]-\infty;b],\ ]a;+\infty[,\ [a;+\infty[,\ ]-\infty;+\infty[.$$

ATTENTION.
Une réunion d'intervalles n'est pas nécessairement un intervalle (par ex. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, car $-1 < 0 < 1$, avec 1 et -1 dans $\mathbb{R}^*$ mais $0 \notin \mathbb{R}^*$).

Les intervalles ont un rôle très important dans la suite : en effet, certaines propriétés des fonctions ne sont vraies que sur un intervalle, et pas sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

2) Voisinages

Définition 3 (Voisinage d'un point réel).
Si $a \in \mathbb{R}$, un **voisinage de a** est une partie $V \subset \mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert centré en a. On a donc :

$$V \text{ est un voisinage de } a \iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V.$$

Proposition 4.
V est un voisinage de a $\iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset V$.

Vocabulaire.
Lorsqu'on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété "au voisinage de a", cela signifie donc que la propriété en question est vraie au moins sur un intervalle de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$. Bien entendu, le réel ε peut-être choisi aussi petit que voulu (du moment qu'il n'est pas nul !).

Définition 5 (Voisinage de l'infini).
Un **voisinage de $+\infty$** est une partie $V \subset \mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Proposition 6.
V est un voisinage de $+\infty$ $\iff \exists A \in \mathbb{R},\ [A;+\infty[\subset V$.

Vocabulaire.
Lorsqu'on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété "au voisinage de $+\infty$", cela signifie donc que la propriété en question est vraie au moins sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$. Bien entendu, le réel A peut-être choisi aussi grand que voulu (on peut même imposer $A > 0$ si ça nous arrange).

Remarque.
On définit de même les voisinages de $-\infty$.

Ce langage de "voisinages" est utile pour décrire simplement les propriétés "locales" des fonctions : limite, continuité, dérivabilité en un point.

Dans toute la suite, on considèrera des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$ (pas toujours un intervalle). Lorsque D est un intervalle, on le notera plutôt I.

3) Limites de fonctions

Définition 7 (Limite d'une fonction en un point réel).
Etant donné une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et deux réels a et ℓ, on dit que **f tend vers ℓ quand x tend vers a** (et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$) si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in D, \quad (|x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Remarque. • *Ceci se réécrit :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x \in [a - \delta; a + \delta] \cap D \Longrightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]).$$

- *En termes de voisinages, cela signifie que pour tout voisinage V de ℓ, on a $f(x) \in V$ dès que x est dans un certain voisinage de a tout en restant dans le domaine D.*

Proposition 8 (Unicité de la limite).
Si f tend vers ℓ quand x tend vers a, alors ℓ est unique. On dit alors que ℓ est **la limite** *de f en a et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

Remarque.
Le réel a n'est pas forcément dans le domaine de définition D, cela peut être une "extrémité" de D (par exemple, si $D =]a; +\infty[$, on peut très bien s'interroger sur l'existence de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, cela a du sens car les voisinages $[a - \delta; a + \delta]$ rencontrent D pour tout $\delta > 0$).
Par contre, inutile d'envisager la limite de f en a si a est "loin" du domaine D : par exemple, $\lim\limits_{x \to a} \ln(x)$ avec $a = -\frac{1}{10}$ n'a aucun sens car $D =]0; +\infty[$, donc dès que δ est trop petit, l'intersection $[a - \delta; a + \delta] \cap D$ est vide.

ATTENTION.
Une fonction, même définie en a, ne possède pas toujours de limite en a.

Définition 9 (Limites en $\pm\infty$, limites infinies).
On peut généraliser la notion de limite en définissant :

- la limite réelle en $\pm\infty$:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \quad \text{signifie} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists A \in \mathbb{R}, \quad (x \in [A; +\infty[\cap D \Longrightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon])$$

(c'est-à-dire : pour tout voisinage V de ℓ, on a $f(x) \in V$ dès que x est dans un certain voisinage de $+\infty$ tout en restant dans D). De même :

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \quad \text{signifie} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists A \in \mathbb{R}, \quad (x \in]-\infty; A] \cap D \Longrightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]).$$

- la limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{signifie} \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\quad (x \in [a-\delta; a+\delta] \cap D \Longrightarrow f(x) \in [A; +\infty[)$$

(c'est-à-dire : pour tout voisinage V de $+\infty$, on a $f(x) \in V$ dès que x est dans un certain voisinage de a tout en restant dans D). On définit de même $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

- la limite infinie en $\pm\infty$: par exemple,

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{signifie} \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\quad (x \in]-\infty; B] \cap D \Longrightarrow f(x) \in [A; +\infty[).$$

On définit également les notions suivantes :

Définition 10 (Limite gauche, limite à droite).

- **Limite à gauche** : on dit que $\ell_1 \in \mathbb{R}$ est la limite à gauche de $f : D \to \mathbb{R}$ en a si la restriction $f_1 : D \cap]-\infty; a[\to \mathbb{R}$ tend vers ℓ_1 lorsque x tend vers a. On note alors $\ell_1 = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
- **Limite à droite** : on dit que $\ell_2 \in \mathbb{R}$ est la limite à droite de $f : D \to \mathbb{R}$ en a si la restriction $f_2 : D \cap]a; +\infty[\to \mathbb{R}$ tend vers ℓ_2 lorsque x tend vers a. On note alors $\ell_2 = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

ATTENTION.
Quand on étudie l'existence d'une limite à gauche (ou à droite) en a, on ignore ce qui se passe au point a (même si f est définie en a). En cas d'existence, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ne dépendent pas de la valeur de $f(a)$.

Résultats algébriques à connaître sur les calculs de limites : limite d'une somme de fonctions, d'un produit, d'un quotient, les différentes formes indéterminées.

Dans les résultats qui suivent, a, b sont des réels, ou $\pm\infty$.

Proposition 11 (Passage à la limite dans une inégalité).
Si $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Proposition 12 (Théorème "des gendarmes").
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dans un voisinage de a, et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ (ça marche aussi si $\ell = \pm\infty$).

Théorème 13 (Limite d'une composée).
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \ell$ (lorsque cela a un sens).

Proposition 14 (Existence de limites pour les fonctions monotones).
Une fonction monotone (croissante ou décroissante) $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ possède toujours des limites (finies ou infinies) en a et en b (et si f est bornée sur $]a; b[$, ces limites sont les bornes supérieure/inférieure de la fonction f sur $]a; b[$).

4) Comparaison locale de fonctions (O, o, $\sim$)

Définition 15 (Relations de comparaison locale entre les fonctions).
Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ et soit a un réel ou $\pm\infty$.

- On dit que ***f* est dominée par *g* au voisinage de *a*** s'il existe un voisinage V de a et une constante $M > 0$ telle que $\forall x \in V \cap D, |f(x)| \leq M|g(x)|$. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.
- On dit que ***f* est négligeable devant *g* au voisinage de *a*** s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : V \cap D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V \cap D, f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.
  On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

- On dit que **f est équivalente à g au voisinage de a** s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\varphi : V \cap D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ et $\forall x \in V \cap D, f(x) = \varphi(x)g(x)$.
  On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Remarque.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a, on a :

- $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \iff \dfrac{f}{g}$ *est bornée au voisinage de a.*
- $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Proposition 16 (Lien entre équivalence et négligeabilité).
$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x)).$

Exemples de propriétés utiles :

- si $f > 0$ au voisinage de a et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $g > 0$ au voisinage de a ;
- si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)k(x)$;
- si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et si $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$;
- si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et si $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

Bien entendu, il existe un tas d'autres propriétés reliant ces notions, mais plutôt que d'en retenir une liste exhaustive (et risquer de se tromper), mieux vaut adopter l'attitude suivante : vérifier la propriété dont on a besoin directement sur l'exemple en revenant systématiquement à la définition.

5) Continuité

Définition 17 (Continuité en un point).
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est **continue en a** si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ATTENTION.
La notion de continuité en a n'a de sens que si f est définie en a.

Proposition 18.
f est continue en a ssi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Définition 19 (Continuité globale).
On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est continue si elle est continue en tout point $a \in D$.

Proposition 20 (Opérations sur les fonctions continues).
Une somme de fonctions continues est continue, un produit, un quotient aussi. La composée de deux fonctions continues est continue.
L'ensemble $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ (des fonctions continues $D \to \mathbb{R}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ (le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $D \to \mathbb{R}$).

Définition 21 (Continuité à gauche, à droite).
On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est continue à gauche en $a \in D$ si la restriction $f_1 : D\cap]-\infty; a] \to \mathbb{R}$ est continue en a. Cela revient à dire que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
On définit de même la continuité à droite en un point.

Définition 22 (Continuité sur une partie).
On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est continue sur $D_1 \subset D$ si la restriction $f_{|D_1} : D_1 \to \mathbb{R}$ est continue.

Proposition 23.
Si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue et $D_1 \subset D$, alors f est continue sur D_1, mais la réciproque est fausse.

6) Dérivabilité

Dans cette section, $f : I \to \mathbb{R}$ est définie sur un **intervalle** $I \subset \mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point).

Définition 24 (Dérivabilité en un point).
Etant donné un point $a \in I$, on dit que f est **dérivable en a** si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (appelée "taux d'accroissement de f en a" et définie sur $I \setminus \{a\}$) possède une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to a$.
Dans ce cas, on note $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (c'est le "nombre dérivé de f en a).

Proposition 25.
f est dérivable en a ssi la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ possède une limite finie lorsque $h \to 0$.

Proposition 26 (Lien entre dérivabilité et continuité).
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a (mais la réciproque est fausse).

Preuve.
Supposons f dérivable en a. Alors, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
Posons alors $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell$ pour $x \neq a$. On a $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, et

$$f(x) = f(a) + (x-a)(\ell + \varepsilon(x)),$$

donc en passant à la limite lorsque $x \to a$, on obtient $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui montre que f est continue en a.

Proposition 27 (Opérations sur les fonctions dérivables).
Si f et g sont dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, λf et fg sont aussi dérivables en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Définition 28 (Dérivabilité globale, fonction dérivée).
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en tout point $a \in I$.
Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ (qui à tout point $t \in I$ associe son nombre dérivé en t) s'appelle la **fonction dérivée** de f. On la note f'.

Proposition 29 (Structure d'espace vectoriel des fonctions dérivables).
L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Définition 30 (Dérivabilité à gauche, à droite).
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable à gauche en a si la restriction $f_1 : I \cap]-\infty; a] \to \mathbb{R}$ est dérivable en a. Cela revient à dire que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, on note $f'_g(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (c'est le "nombre dérivé à gauche de f en a).
On définit de même la dérivabilité à droite en un point (et on note $f'_d(a)$ le "nombre dérivé à droite").

Proposition 31.
f est dérivable en a ssi (f est dérivable à gauche et à droite en a **et** *$f'_g(a) = f'_d(a)$), et dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Interprétation graphique : si f est dérivable à gauche en a, alors la droite passant par le point $(a; f(a))$ et de pente $f'_g(a)$ est appelée demi-tangente à gauche au graphe de f en a. On définit de même la demi-tangente à droite.
Si f est dérivable en a, alors la droite passant par $(a; f(a))$ et de pente $f'(a)$ est appelée tangente au graphe de f en a.

Définition 32 (Dérivabilité sur un sous-intervalle).
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si la restriction $f_{|J} : J \to \mathbb{R}$ est dérivable.

Proposition 33.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et si $J \subset I$, alors f est dérivable sur J, mais la réciproque est fausse.

Proposition 34 (Dérivabilité d'une composée).
Si $f : I \to J$ est dérivable en a, si $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Preuve.
On utilise des DL d'ordre 1.
Puisque f est dérivable en a, on a

$$f(x) = f(a) + f'(a) * (x - a) + (x - a) * \varepsilon_1(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$.
Puisque g est dérivable en $f(a)$, on a

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a)) * (y - f(a)) + (y - f(a)) * \varepsilon_2(y),$$

avec $\lim\limits_{y \to f(a)} \varepsilon_2(y) = 0$.
En posant $y = f(x)$, on a donc par composition :

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a)) * (f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a)) * \varepsilon_2(f(x)),$$

c'est-à-dire

$$g(f(x)) = g(f(a))+g'(f(a))*(f'(a)*(x-a)+(x-a)*\varepsilon_1(x))+(f'(a)*(x-a)+(x-a)*\varepsilon_1(x))*\varepsilon_2(f(x)),$$

qu'on peut réécrire

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + g'(f(a)) * f'(a) * (x - a) + (x - a) * \varepsilon_3(x),$$

en posant :

$$\varepsilon_3(x) = g'(f(a)) * \varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x)) * \varepsilon_2(f(x)).$$

Par continuité de f en a, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, et donc, par composition et produit de limites, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_3(x) = 0$.
On a donc montré que la fonction $g \circ f$ possède un DL_1 en a, ce qui montre sa dérivabilité en a. Enfin, le nombre dérivé $(g \circ f)'(a)$ est le coefficient d'ordre 1 du DL_1, donc $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) * f'(a)$.

7) Dérivées successives, classe C^k

I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point).

Définition 35 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$).
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** si elle est dérivable et si sa dérivée f' est continue. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 36 (Fonction k fois dérivable, dérivée k^e).
Etant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est **k fois dérivable** si f est dérivable et si f' est $k-1$ fois dérivable (c'est une définition récursive).
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la **dérivée k^e de f**, notée $f^{(k)}$, si elle existe, par :

$$f^{(0)} = f, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$$

(c'est également une définition récursive).

Définition 37 (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$).
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^k$** (où $k \in \mathbb{N}^*$) si elle est k fois dérivable et si sa dérivée k^e (notée $f^{(k)}$) est continue. On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 38 (Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$).
On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** (ou "indéfiniment dérivable") si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 39 (Structure d'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et on a les inclusions strictes suivantes :

$$\{0\} \subset \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I,\mathbb{R}).$$

II Les théorèmes "abstraits"

Les fonctions sont définies sur des **intervalles** (non vides et non réduits à un point) là encore.

1) Sur la continuité (TVI, th. de la bijection, continuité sur un segment)

Théorème 40 (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle, et soit a, b dans I tels que $a < b$. Alors, pour tout réel α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $\alpha = f(c)$.

Intêret pratique : montrer qu'une équation de la forme $f(x) = \alpha$ possède au moins une solution (sans résoudre).

Proposition 41 (Corollaire du TVI).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle. Alors, l'image $J = f(I)$ est aussi un intervalle.

Théorème 42 (Théorème "de la bijection").
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$, et $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f. De plus, les extrémités de J sont les limites de f aux extrémités de I.

Intérêt pratique : justifier qu'une fonction est bijective sans calcul de réciproque.

Théorème 43 (Théorème des bornes atteintes).
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment (intervalle fermé et borné). Alors, f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe c, d dans $[a;b]$ tels que

$$f(c) = \inf_{[a;b]} f, \quad f(d) = \sup_{[a;b]} f.$$

Intérêt pratique : justifier sans calcul qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Proposition 44 (Corollaire du théorème des bornes atteintes).
Si f est continue sur un segment $[a;b]$, alors l'image $f([a;b])$ est aussi un segment.

ATTENTION.
Ne pas confondre "intervalle" et "segment" !

2) Sur la dérivabilité (Rolle, accroissements finis, limite de la dérivée)

Proposition 45 (Condition nécessaire d'extremum local).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum (maximum ou minimum) local en un point $a \in I$ **qui n'est pas une extrémité de** *I, alors $f'(a) = 0$ (attention, ça ne marche pas si a est une extrémité de I).*

Preuve.
Supposons que f possède un minimum local en a :

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \; f(x) \geq f(a)$$

(l'autre cas où f possède un maximum local se traitera de la même façon, en inversant les inégalités).
Par hypothèse, a n'est pas une extrémité de I : on peut donc choisir $\delta > 0$ suffisamment petit pour avoir $[a-\delta, a+\delta] \subset I$ (faire un dessin). Ainsi :

$$\exists \delta > 0, \qquad \forall x \in [a-\delta, a+\delta], \; f(x) \geq f(a).$$

Par hypothèse également, f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$.
Pour montrer que cette limite est nulle, on va faire une étude de signe, à droite et à gauche, ce qui est possible puisque

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

* pour tout $x \in]a; a+\delta]$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (numérateur positif et dénominateur strictement positif), donc par passage à la limite à droite, on obtient $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, et donc $f'(a) \geq 0$;
* pour tout $x \in [a-\delta; a[$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (numérateur positif et dénominateur strictement négatif), donc par passage à la limite à gauche, on obtient $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$, et donc $f'(a) \leq 0$;

Finalement, on a $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$, donc $f'(a) = 0$.

ATTENTION.
La réciproque est fausse ! (on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f admette un extremum local en a).

Théorème 46 (Théorème de Rolle).
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a;b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Intêret pratique : montrer qu'une équation de la forme $f'(x) = 0$ possède au moins une solution (sans résoudre).

Preuve.
La fonction f est continue sur un segment, donc d'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0, x_1 \in [a,b]$ tels que $f(x_0) = \min\limits_{[a;b]} f$ et $f(x_1) = \max\limits_{[a;b]} f$.
Deux cas se présentent alors :

- si $x_0 \in]a;b[$ ou si $x_1 \in]a;b[$, alors f atteint un extremum local en un point c qui n'est pas une extrémité de $[a;b]$, et f est dérivable en ce point, donc d'après la prop. 45, cela entraîne $f'(c) = 0$.
- sinon, on a $\{x_0, x_1\} = \{a, b\}$, et dans ce cas, puisque $f(a) = f(b)$, la fonction f est constante sur $[a;b]$, donc sa dérivée (qui existe sur $]a : b[$) est nulle en tout point $c \in]a;b[$.

Théorème 47 (Egalité des accroissements finis).
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Intêret pratique : majorer des "écarts" du type $|f(b) - f(a)|$ quand on sait majorer la dérivée f'. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c strictement compris entre a et b tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$, donc

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \times |b-a| \leq M|b-a|,$$

où $M = \sup\limits_{t\in]a;b[} |f'(t)|$.

Preuve.
On doit montrer qu'en un point $c \in]a;b[$, la tangente au graphe de f a une pente égale à $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Cela revient à dire que la "corde" reliant les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$ est parallèle à l'une des tangentes au graphe de f. L'équation de cette "corde" est $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.
En posant $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$ (l'écart vertical entre le graphe de f et la corde), on a g qui vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, car g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et $g(a) = g(b) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Corollaire 48 (Inégalité des accroissements finis).
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a;b[$. Si $\forall x \in]a;b[,\ m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Théorème 49 (Théorème de la limite de la dérivée).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ (avec $a \in I$).

(i) Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

(ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a (tangente verticale en a).

Intêret pratique : étudier la dérivabilité d'une fonction en un point sans passer par le taux d'accroissement. Mais parfois, f' ne possède pas de limite (ni finie ni infinie) en a, et donc dans ce cas on ne peut pas conclure avec ce théorème (et donc on est obligé de revenir au taux d'accroissement).

Preuve.

(i) Soit un réel $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x-a| \leq \delta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on peut appliquer l'égalité des accroissements finis à f entre les points a et x, puisque f est continue sur $[a;x]$ ou $[x;a]$ et f est dérivable sur $]a;x]$ ou $[x;a[$: il existe un réel c_x strictement compris entre a et x tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$.
On cherche donc à montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Or, par hypothèse, $f'(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \ell$, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \setminus \{a\}, \quad |t-a| \leq \eta \Longrightarrow |f'(t) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Il faudrait donc pouvoir utiliser cette dernière égalité avec $t = c_x$. L'idée est la suivante : lorsque x est assez proche de a, c_x est également proche de a, et donc $f'(c_x)$ est proche de ℓ.

Puisque c_x est compris entre a et x, on a $|c_x - a| \leq |x-a|$, donc on peut choisir $\delta = \eta$:

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |c_x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f'(c_x) - \ell| \leq \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) On montre de même que si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$:
étant donné un réel A, on a, puisque $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = +\infty$,

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f'(x) \geq A.$$

Fixons $x \in I \setminus \{a\}$ vérifiant $|x-a| \leq \delta$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe un réel c_x strictement compris entre a et x tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Vu que $|c_x - a| \leq |x-a| \leq \delta$, on en déduit que $f'(c_x) \geq A$, et donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq A$. Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, et donc f n'est pas dérivable en a.

3) Lien entre dérivée et monotonie

Notation.
Pour un intervalle I, on note $\overset{\circ}{I}$ l'ensemble des points intérieurs de I, c'est-à-dire les points de I qui ne sont pas des extrémités de I.

Théorème 50 (Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. On a les équivalences :

- (i) *f est constante sur I $\iff$ $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*
- (ii) *f est croissante (resp. décroissante) sur I $\iff$ $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$.*

Preuve.

(i) $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est constante, alors le taux d'accroissement de f en tout point $a \in \overset{\circ}{I}$ est nul, donc sa limite $f'(a)$ est nulle.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que f' est nulle sur $\overset{\circ}{I}$. Etant donnés deux points distincts a, b de I, il existe (d'après l'égalité des accroissements finis), un réel c strictement compris entre a et b (donc $c \in \overset{\circ}{I}$) tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0,$$

donc $f(b) = f(a)$, ce qui montre que f est constante sur I.

(ii) Cela fonctionne de la même manière, en remplaçant "$= 0$" par "≥ 0". En effet, la croissance de f (resp. la décroissance) se traduit par $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$ (resp. ≤ 0) pour tout $a \neq b$.

Théorème 51 (Conditions suffisantes de stricte monotonie).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.
Si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et f' ne s'annule qu'en un nb. fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Si $f' \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et f' ne s'annule qu'en un nb. fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

Intérêt pratique : étudier les variations d'une fonction sur un intervalle en étudiant le signe de f'.

ATTENTION.
L'équivalence "f strictement croissante $\iff$ $f' > 0$" est fausse !

III Les théorèmes "de calcul"

I et J désignent toujours des intervalles non vides et non réduits à un point.

1) Formule de Leibniz

Théorème 52 (Formule de Leibniz).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors le produit fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$.

Intérêt pratique : calculer les dérivées successives d'un produit.

2) Dérivation composée

Théorème 53 (Théorème de composition local).
Si $f : I \to J$ est dérivable en a, si $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Théorème 54 (Théorème de composition global).
Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Corollaire 55 (Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).
Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (mais il n'y a pas de formule simple pour $(g \circ f)^{(n)}$ hélas !).

Intérêt pratique : justifier sans calcul qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$.

3) Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 56 (Dérivabilité locale de f^{-1}).
Soit une bijection $f : I \to J$ continue sur I, dérivable en $a \in I$ et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème 57 (Dérivabilité globale de f^{-1}).
Soit une bijection $f : I \to J$ dérivable telle que f' ne s'annule jamais. Alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Intérêt pratique : calculer la dérivée de f^{-1} en certains points sans nécessairement connaître f^{-1}.

4) Formule de Taylor-Young et DL

Théorème 58 (Formule de Taylor-Young).
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$), et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

Intérêt pratique : calculer des DL.

Corollaire 59 (Existence de DL de tout ordre pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$).
Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors f possède des DL à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en n'importe quel point $a \in I$. Mais **attention**, *la réciproque est fausse !*

IV Exercices

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

1) Exercices de cours

I désigne un intervalle réel (non vide et non réduit à un point).

Exercice 1 (Limite à gauche, à droite).
Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui possède une limite à gauche en 0, une limite à droite en 0, telle que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, mais qui ne possède pas de limite en 0.

Exercice 2 (Le TVI).

1. Illustrer le théorème des valeurs intermédiaires par un dessin.
2. Donner un exemple de fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que l'image $f(I)$ n'est pas un intervalle (alors que I en est un).

Exercice 3 (Image d'un segment).
Donner un exemple de fonction $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ telle que l'image $f([0; 1])$ soit un intervalle qui n'est pas un segment.

Exercice 4 (Fonctions pas dérivables).

1. Expliquer pourquoi $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, bien que continue en 0.
2. Même question avec $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 5 (Dérivée nulle et extremum local).
Montrer à l'aide de contre-exemples que :

1. La prop. 45 ("condition nécessaire d'extremum local") n'admet pas de réciproque.
2. La prop. 45 devient fausse si on se place en un point a qui est une extrémité de l'intervalle I.

Exercice 6 (Dérivée sans limite).
En étudiant l'exemple $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (prolongée continûment en 0), montrer qu'une fonction f peut être dérivable en a sans que sa dérivée f' ne possède une limite en a.

Exercice 7 (Développements limités et dérivabilité).

1. Rappeler (sans démonstration) le lien entre la dérivabilité d'une fonction en un point et les développements limités.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ possède un développement limité à l'ordre 2 en 0.
3. Est-elle deux fois dérivable en 0 ?

2) Exercices concrets

Exercice 8 (Prolongement par continuité).
Le nombre réel a étant donné, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a & \text{si } |x| > 2 \\ 2x - 1 & \text{si } |x| < 2 \end{cases}.$$

Cette fonction est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 9 (Continuité et partie entière).
Etudier la continuité des deux fonctions f et g définies (sur quel ensemble ?) par

$$f(x) = x + \sqrt{x - E(x)}, \qquad g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)},$$

où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne la fonction "partie entière".

Exercice 10 (Etude de fonction).
Faire l'étude complète (ensemble de définition, prolongement éventuel, dérivée, variations, asymptotes ou tangentes aux points remarquables, allure de la courbe) de la fonction f définie par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 11 (*Etude de fonction bis).
Etudier la fonction $x \mapsto f(x) := \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)$.
On déterminera soigneusement l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f **avant de dériver !**...

Exercice 12 (Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$).
On considère la fonction f définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 13 (Dérivées successives).
Calculer les dérivées successives de la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^{3x}$.

Exercice 14 (Recherche de zéros).
Pour x réel, on pose $f(x) = 4x^5 - x^2 + x + 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]-1;1[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution en dehors de $]-1;1[$
(*on pourra distinguer deux cas*).

Exercice 15 (*Utilisation du théorème de Rolle).
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On fixe $x_0 \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que

$$f(x_0) = \frac{f''(x_1)}{2}(x_0 - a)(x_0 - b).$$

Indication : on pourra utiliser la fonction $\varphi(x) = f(x) - \alpha(x-a)(x-b)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi...

Exercice 16 (Utilisation des accroissements finis).

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x > 0,\ \ln(1+x) \leq x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-,\ e^x \geq 1 + x.$$

2. (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que si $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) Exercices supplémentaires

Exercice 17 (Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la dérivée n^e de f sur $\mathbb{R}^*$ est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

   où P_n est un polynôme (que l'on ne cherchera pas à calculer dans le cas général).
3. En déduire que f peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que l'on notera g, et préciser la valeur de $g^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 (*Développements limités et classe $\mathcal{C}^\infty$).
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f possède des développements limités à tout ordre en 0.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Exercice 19 (Zéros des dérivées).
On se propose de montrer le résultat suivant :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$.
On suppose que f s'annule $n+1$ fois sur $[a;b]$. Alors, $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a;b[$.

1. Montrer ce résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.
2. Montrer ce résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

Exercice 20 (*Limites et périodicité).
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique de période $T > 0$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que si f admet une limite finie quand x vers $+\infty$, alors f est constante.
   Indication : on pourra utiliser des suites.
3. La fonction f peut-elle admettre une limite infinie en $+\infty$?