Annexe B : Révisions d'algèbre linéaire de TSI 1 Corrigé des exercices

1) Exercices à traiter en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. On cherche les réels x, y, z tels que $xu_1+yu_2+zu_3 = 0_{\mathbb{R}^5}$. Cela conduit à la résolution du système linéaire suivant :* $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 3x-y+5z=0 \\ 4x+2y+10z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases}$

Résolvons ce système en utilisant l'écriture matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_2 \end{array}$$

La matrice échelonnée obtenue possède deux pivots, donc le système linéaire (qui a trois inconnues) possède deux inconnues "principales" et une inconnue "secondaire". Il y a donc des solutions non nulles, ce qui montre que $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ n'est pas libre}}$.

De plus, le système est de rang 2 (nombre de pivots), donc $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est de rang } 2}$.

2. La résolution du système précédent montre également que :

- *la sous-famille (u_1, u_2) est libre, puisque les pivots correspondent aux colonnes 1 et 2 de la matrice du système ;*
- *u_3 est combinaison linéaire de (u_1, u_2), donc*

$$F = Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect(u_1, u_2).$$

On en déduit que la famille $\boxed{\mathcal{B} = (u_1, u_2)}$ *est libre et génératrice de F,* $\boxed{\text{c'est donc une base de } F}$.

Enfin, $\boxed{\dim(F) = 2}$, *puisque F possède une base de deux vecteurs.*

3. *Considérons un vecteur* $(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5$. *On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que* $(x, y, z, t, w) \in F$. *Puisque* $F = Vect(u_1, u_2)$, *on a*

$$(x, y, z, t, w) \in F \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t, w) = \alpha u_1 + \beta u_2,$$

ce qui signifie que le système linéaire $\alpha u_1 + \beta u_2 = (x, y, z, t, w)$, *d'inconnue* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *est compatible.*
On résout ce système en notation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & -1 & z \\ 4 & 2 & t \\ 1 & 1 & w \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|l} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & \frac{y-2x}{3} \\ 0 & 0 & -5x - 2y + 3z \\ 0 & 0 & -2y + t \\ 0 & 0 & x - 2y + 3w \end{array}\right).$$

Les trois dernières lignes de ce système forment une condition de compatibilité. On a donc

$$(x, y, z, t, w) \in F \iff \left\{\begin{array}{c} -5x - 2y + 3z = 0 \\ -2y + t = 0 \\ x - 2y + 3w = 0 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{\left\{\begin{array}{c} -5x - 2y + 3z = 0 \\ -2y + t = 0 \\ x - 2y + 3w = 0 \end{array}\right. \quad \text{est un système d'équations cartésiennes de } F}$.

La base $\mathcal{B}$ *n'est pas indispensable pour obtenir ces équations, car on aurait pu effectuer le même calcul en partant de la famille génératrice* (u_1, u_2, u_3) *(mais ça aurait été plus long).*

4. (a) *On résout maintenant le système d'équations de* F *(à cinq inconnues) : puisque* $\dim(F) = 2$, *le système a deux inconnues "secondaires", et donc trois "principales". Toutes les inconnues s'expriment donc en fonction de deux paramètres :*

$$\left\{\begin{array}{c} -5x - 2y + 3z = 0 \\ -2y + t = 0 \\ x - 2y + 3w = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = \frac{1}{3}(5x + 2y) \\ t = 2y \\ w = \frac{1}{3}(-x + 2y) \end{array}\right. .$$

Donc $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = \frac{1}{3}(5x + 2y) \\ t = 2y \\ w = \frac{1}{3}(-x + 2y) \end{array}\right. \quad (\text{avec } x, y \in \mathbb{R}) \text{ est un système d'équations paramétriques de } F}$.

(b) *D'après la question précédente, les élements de* F *sont les vecteurs*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quitte à multiplier ces vecteurs par 3, *on obtient que* $\boxed{\text{la famille } (v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

est donc génératrice de F. *Vu que* $\dim(F) = 2$, *elle est automatiquement* $\boxed{\text{une base de } F}$.

Corrigé de l'exercice 2.
Notons $F = Vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. *Déterminer le rang de la famille* $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *signifie déterminer la dimension de* F.

La famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *est une famille génératrice de* F.
La famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *est-elle libre ?*
On cherche tous les réels r, s *et* t *tels que :*

$$\begin{aligned}
r\overrightarrow{x} + s\overrightarrow{y} + t\overrightarrow{z} = (0,0,0) &\Leftrightarrow (r+s+at, r+as+t, ar+s+t) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r+s+at = 0 \\ r+as+t = 0 \\ ar+s+t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r+s+at = 0 & \\ (a-1)s + (1-a)t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-a)s + (1-a^2)t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r+s+at = 0 & \\ (a-1)s + (1-a)t = 0 & \\ (2-a-a^2)t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r+s+at = 0 \\ (a-1)s + (1-a)t = 0 \\ (a-1)(a+2)t = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

- *Si* $a \neq 1$ *et* $a \neq -2$ *alors on obtient* $r = s = t = 0$ *et donc la famille* $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *est libre.*
  La famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *est alors une base de* F *qui est donc de dimension 3.*
- *Si* $a = 1$ *alors* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{z}$ *et donc* $F = Vect(\overrightarrow{x})$. *La famille* $(\overrightarrow{x})$ *est libre (un seul vecteur non nul) et génératrice de* F *donc c'est une base de* F. F *est donc de dimension 1.*
- *Si* $a = -2$ *alors* $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{z}$. *Donc on a* $F = Vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.
  On montre alors facilement que la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *est libre. Donc la famille* $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ *est une base de* F.
  En conclusion, $rg(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \dim(F) = 2$.

Corrigé de l'exercice 3. *1. On peut tout de suite remarquer que* $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ *donc* $f_3 = 2f_4 - f_1$. *La famille* (f_1, f_2, f_3, f_4) *est donc liée.*

2. On cherche tous les réels a, b, c *tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad ag_1(x) + bg_2(x) + cg_3(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = 0$ *on a* $a + b = 0$, *pour* $x = 1$, *on obtient* $a + b + b + c = 0$ *et pour* $x = -1$ *on obtient* $a + c = 0$.
Par conséquent, $a = b = c = 0$.
La famille (g_1, g_2, g_3) *est libre.*

Corrigé de l'exercice 4.
Dans chaque cas, on voit si l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence (ici $\mathbb{R}^2$, *ou* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ou* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*).*

1) Non : n'est pas stable par somme.
Par ex, si $u = (1,2)$ *et* $v = (-2,-1)$, *on a* $u, v \in E_1$, *mais* $u + v = (-1,1) \notin F$.

2) Non : n'est pas stable par produit externe.
Par ex, si $u = (1,2)$, *alors* $-u = (-1,-2) \notin F$.

3) Oui car :
- *si* $u_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $nu_n \to 0$, *donc la suite nulle est dans* E_3.
- *si* (u_n) *et* (v_n) *sont dans* E_3 *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

$$n(\lambda u_n + v_n) = \lambda nu_n + nv_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $nu_n \to 0$ *et* $nv_n \to 0$ *par hypothèse. On a donc* $(\lambda u_n + v_n) \in E_3$.

On rappelle que $u_n = o(1/n)$ *signifie que* $nu_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4) Non : n'est pas stable par produit externe.
Par ex, si f *est la fonction constante égale à* 1, *on a* $f \in F$, *mais* $2f \notin F$.
On rappelle que $f(\mathbb{R}) \subset [0;1]$ *signifie que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

5) Oui car :

- *si f est la fonction nulle, alors $f(2) = 0$. La fonction nulle est donc dans E_5.*
- *si f et g sont dans E_5, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$(\lambda f + g)(2) = \lambda f(2) + g(2) = 0,$$

puisque $f(2) = g(2) = 0$. On a donc $\lambda f + g \in E_5$.

6) Non : E_6 ne contient pas la fonction nulle.

Corrigé de l'exercice 5. *1. On obtient facilement $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.*

2. On donne deux méthodes :

- *A la main, on exprime les $f(b'_i)$ en fonction des c'_j :*

$$f(b'_1) = f(1, -2, 3) = (8, 5) = 7c'_1 - 2c'_2,$$

$$f(b'_2) = f(-1, 0, 1) = (-2, 5) = 17c'_1 - 12c'_2,$$

$$f(b'_3) = f(1, 1, -1) = (1, -4) = -13c'_1 + 9c'_2,$$

(pour trouver les deux coordonneés, on doit chaque fois résoudre un système). On obtient ainsi A' colonne par colonne :

$$A' = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 7 & 17 & -13 \\ -2 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

- *Avec les matrices de passages :*

$$P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A' = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 17 & -13 \\ -2 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 6. *1. On remarque que $A^2 = 5A - 6I_2$, donc le polynôme $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ est annulateur de A.*

2. Puisque $A(5I_2 - A) = 6I_2$, on a $A \times \frac{1}{6}(5I_2 - A) = \frac{1}{6}(5I_2 - A) \times A = I_2$, ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{6}(5I_2 - A)$.

3. Soit $n \geq 2$. Notons Q le quotient et R le reste du polynôme X^n dans la division euclidienne par P. Puisque $\deg(P) = 2$, on a

$$X^n = PQ + R, \qquad \deg(R) \leq 1.$$

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $R = aX + b$. D'où l'égalité polynomiale :

$$X^n = P(X)Q(X) + aX + b = (X-2)(X-3)Q(X) + aX + b.$$

En évaluant successivement en $X = 2$ et $X = 3$, on obtient $\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ 3a + b = 3^n \end{cases}$, d'où $a = 3^n - 2^n$ et $b = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.
Finalement, en calculant le polynôme en la matrice A, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = P(A)Q(A) + aA + bI_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} + aA + bI_2 = (3^n - 2^n)A + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)I_2.$$

Corrigé de l'exercice 7. *1. (a) Soit* (x, y, z) *et* (x', y', z') *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned} f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ &= (x+\lambda x'-(y+\lambda y')+2(z+\lambda z'),\ (y+\lambda y')-(z+\lambda z'),\ 2(x+\lambda x')-(y+\lambda y')+3(z+\lambda z')) \\ &= (x-y+2z, y-z, 2x-y+3z)+\lambda\,(x'-y'+2z', y'-z', 2x'-y'+3z') \\ &= f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z') \end{aligned},$$

donc f *est linéaire. Puisque* $f : E \to E$, *on en déduit que* f *est un endomorphisme de l'espace vectoriel* E.

(b) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
D'après la définition de f, *on a*

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,2) = e_1 + 2e_3 \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1,-1) = -e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (2,-1,3) = 2e_1 - e_2 + 3e_3 \end{cases},$$

donc on en déduit (colonne par colonne) la matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}$ *:*

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = ([f(e_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(e_2)]_{\mathcal{B}} \quad [f(e_3)]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculons $Ker(A)$ *:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

et donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $Ker(A) = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *et on en déduit que* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3$ *est une base de* $Ker(f)$ *(ce sous-espace est donc de dimension* 1*).*

(d) On sait déjà que $\dim(Ker(f)) = 1$. *D'après le théorème du rang, on en déduit que*

$$\dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Or, on sait que les trois colonnes de A *forment une famille génératrice de* $Im(f)$. *Il suffit donc d'en extraire une base de* $Im(f)$, *c'est-à-dire une sous-famille libre de* 2 *vecteurs : la famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *convient.*
Finalement, la famille $(e_1 + 2e_3, -e_1 + e_2 - e_3)$ *est une base de* $Im(f)$.

2. (a) *On a* $H = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} = Vect(e_1, e_2)$, *donc* $\dim(H) = 2$.
Puisque $\dim(Ker(f)) = 1$, *on a* $\dim(Ker(f)) + \dim(H) = 3 = \dim(E)$.
Ensuite, on a $Ker(f) \cap H = \{0_E\}$, *car si* $(x, y, z) \in Ker(f) \cap H$, *alors*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

(puisque $(x, y, z) \in Ker(f)$*). Mais* $(x, y, z) \in H$, *donc sa troisième coordonnée est nulle, i.e.* $\lambda = 0$. *Donc* $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
Finalement, on a $Ker(f) \cap H = \{0_E\}$ *et* $\dim(Ker(f)) + \dim(H) = \dim(E)$, *donc* $Ker(f)$ *et* H *sont supplémentaires dans* E *(i.e.* $E = Ker(f) \oplus H$*).*

(b) *Pour tout vecteur* $X = (x, y, z) \in E$, $p(X)$ *est l'unique vecteur de* H *tel que* $X - p(X) \in Ker(f)$. *Il existe donc* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $X - p(X) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. *D'où* $p(X) = \begin{pmatrix} x+\alpha \\ y-\alpha \\ z-\alpha \end{pmatrix}$.
Mais $p(X) \in H$, *donc la troisième coordonnée de ce vecteur est nulle, ce qui amène* $\alpha = z$, *puis*

$$p(X) = \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) *D'après l'expression de* p *précedemment obtenue, on a*

$$p(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3, \quad p(e_2) = e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3, \quad p(e_3) = e_1 - e_2 = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3,$$

donc la matrice de p *dans la base canonique de* E *est*

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = ([p(e_1)]_{\mathcal{B}} \quad [p(e_2)]_{\mathcal{B}} \quad [p(e_3)]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 8. *1. On a* $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, *donc il suffit de montrer que* f *est linéaire : pour tous* $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f(\lambda P_1 + P_2) = (X^2+1)(\lambda P_1 + P_2)'' - X(\lambda P_1 + P_2)' - 3(\lambda P_1 + P_2).$$

Par linéarité de la dérivation, ceci se réécrit :

$$f(\lambda P_1 + P_2) = (X^2+1)(\lambda P_1'' + P_2'') - X(\lambda P_1' + P_2') - 3(\lambda P_1 + P_2),$$

c'est-à-dire

$$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\left((X^2+1)P_1'' - XP_1' - 3P_1\right) + \left((X^2+1)P_2'' - XP_2' - 3P_2\right) = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

2. *Soit* $P \in F$. *On a* $\deg(P) \leq 3$, *donc*

$$\deg((X^2+1)P'') = 2 + \deg(P'') = \deg(P), \qquad \deg(XP') = 1 + \deg(P') = \deg(P),$$

ce qui entraîne

$$\deg(f(P)) \leq \max\left(\deg((X^2+1)P''); \deg(XP'); \deg(3P)\right) \leq 3.$$

On a donc $f(P) \in F$, *ce qui montre bien que le sous-espace* F *est stable par* f.

3. *La base canonique de* F *est* $\mathcal{B} = (1; X; X^2; X^3)$. *En outre, on a*

$$\begin{cases} g(1) = f(1) = (X^2+1) \times 0 - X \times 0 - 3 \times 1 = -3, \\ g(X) = f(X) = (X^2+1) \times 0 - X \times 1 - 3X = -4X, \\ g(X^2) = f(X^2) = (X^2+1) \times 2 - X \times 2X - 3X^2 = 2 - 3X^2, \\ g(X^3) = f(X^3) = (X^2+1) \times 6X - X \times 3X^2 - 3X^3 = 6X. \end{cases}$$

En notant $M = Mat_{\mathcal{B}}(g)$, les colonnes de M sont les coordonnées de la famille $(g(1), \cdots, g(X^3))$ dans la base $(1, \cdots, X^3)$. D'où

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Déterminons d'abord une base de $Ker(M)$:*

$$M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3x + 2z = 0 \\ -4y + 6t = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = \frac{3}{2}t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $Ker(M) = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *correspond (via la base canonique) au polynôme* $3X + 2X^3 \in F$.

On en déduit que le polynôme $3X + 2X^3$ forme une base de $Ker(g)$ (qui est donc de dim. 1).

5. *Le théorème du rang donne déjà* $\dim(Im(g)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(Ker(g)) = 4 - 1 = 3$.
En outre, la famille image de la base canonique forme une famille génératrice de $Im(g)$:

$$Im(g) = Vect(g(1), g(X), g(X^2), g(X^3)).$$

Comme les 4 polynômes $g(1), g(X), g(X^2), g(X^3)$ sont de degré ≤ 2, on a $Im(g) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
Cette inclusion plus le fait que $\dim(Im(g)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ *entraîne que* $Im(g) = \mathbb{R}_2[X]$.

2) Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 9. — *On remarque que E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel connu.*
Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *E est un ensemble non vide car la matrice nulle est dans cet ensemble. En effet on a $A0 = 0$ et $0A = 0$ donc $A0 = 0A$ ce qui veut dire que $0 \in E$.*
- *On considère K et L deux matrices qui appartiennent à l'ensemble E. Cela veut dire que l'on a $AK = KA$ et $AL = LA$.*
  On considère aussi a et b deux réels.
  On veut montrer que la matrice $aK + bL$ est aussi dans E.
  On a $A(aK + bL) = aAK + bAL = aKA + bLA = (aK + bL)A$. Cela signifie que $aK + bL$ appartient à E.
  On a donc bien montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  E est donc lui-même un espace vectoriel.

Corrigé de l'exercice 10.
Pour montrer que tous ces ensembles sont des espaces vectoriels il suffit de les écrire sous la forme $Vect(\ldots)$. Cela démontrera que ce sont des sous-espaces vectoriels donc des espaces vectoriels et, de plus, cela nous donnera une famille génératrice ! Les calculs ne sont pas détaillés pour cet exercice de niveau première année.

1. *On a :* $\begin{cases} 2x - y + 2z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 2y \\ t = y + z = 3y - 2x \end{cases}$.
   Grâce à ce calcul on a : $A = \{(x, y, -2x+2y, -2x+3y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 0, -2, -2), (0, 1, 2, 3))$.
   Donc A est un espace vectoriel et la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, -2, -2), (0, 1, 2, 3))$ est une famille génératrice de A.
   Les deux vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ ne sont visiblement pas proportionnels donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.
   La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de A et $\dim(A) = 2$.
2. *Un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n peut s'écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.*
   $P(1) = 0$ équivaut à $a_0 = -\sum_{k=1}^{n} a_k$.
   Donc $B = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k(X^k - 1)/a_k \in \mathbb{R}\right\} = Vect((X^k - 1)_{1 \leqslant k \leqslant n})$.
   Donc B est un espace vectoriel et la famille $\mathcal{B} = ((X^k - 1)_{1 \leqslant k \leqslant n})$ est génératrice de B.
   De plus, c'est une famille de polynômes échelonnée en degrés donc elle est libre.
   Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de B et $\dim(B) = n$.
3. *C est un espace vectoriel car c'est un sous-espace engendré et la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice de C mais elle est liée car : $f_1 = 3f_2 + 2f_3$.*
   La famille (f_1, f_2) est toujours génératrice de C mais cette fois-ci cette famille est libre.
   La famille (f_1, f_2) est une base de C et $\dim(C) = 2$.

Corrigé de l'exercice 11. • $\boxed{\Longleftarrow}$ *Trivial car si $F \subset G$ (resp. $G \subset F$), on a $F \cup G = G$ (resp. $F \cup G = F$), donc $F \cup G$ est bien un sev de E.*

• $\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons que $F \cup G$ soit un sev de E et montrons alors que l'on a $F \subset G$ ou $G \subset F$. Cela revient à montrer que non$(F \subset G) \implies G \subset F$. Prouvons donc cette dernière implication avec des éléments.*
Si non$(F \subset G)$, alors il existe $x_0 \in F$ tel que $x_0 \notin G$. Ensuite, pour un élément $x \in G$ quelconque, on a $x \in F \cup G$ et $x_0 \in F \cup G$, donc $x + x_0 \in F \cup G$ (puisque $F \cup G$ est un sev de E), c'est-à-dire que $x + x_0 \in F$ ou $x + x_0 \in G$.

* *Si $x + x_0 \in G$, alors, puisque $x \in G$, cela entraîne (G étant stable par combinaison linéaire) $x_0 \in G$ (puisque $x_0 = (x + x_0) - x$), ce qui est contradictoire.*
* *Donc on a $x + x_0 \in F$.*

Par stabilité de F, on obtient $x \in F$ (car $x = (x + x_0) - x_0$, $x + x_0 \in F$ et $x_0 \in F$). On a donc montré $x \in G \implies x \in F$ pour x quelconque. D'où l'inclusion voulue $G \subset F$.

Corrigé de l'exercice 12.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *deux colonnes de* $\mathbb{Q}^n$.

Le système linéaire $AX = Y$ *équivaut successivement à :*

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 & = & y_1 \\ x_2 + x_3 & = & y_2 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} + x_n & = & y_{n-1} \\ x_n & = & y_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_n & = & y_n \\ x_{n-1} & = & y_{n-1} - y_n \\ x_{n-2} & = & y_{n-2} - y_{n-1} + y_n \\ \vdots & & \\ x_1 & = & y_1 - y_2 + y_3 - \cdots + (-1)^{n-1} y_n \end{array}\right. ,$$

donc

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que A *est inversible et*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquer que A^{-1} *est triangulaire supérieure, comme* A *(c'est normal).*

Corrigé de l'exercice 13. *1.*

- *On a bien* $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, *puisque si* $\deg(P) \leq n$, *alors*

$$\deg(\varphi_n(P)) = \deg(P(X+1) - P(X)) \leq \max(\deg(P(X+1)); \deg(P(X)) = \deg(P(X)) \leq n.$$

- φ_n *est linéaire, car pour tous* $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\varphi_n(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X) = \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - \lambda P_1(X) - P_2(X),$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n(\lambda P_1 + P_2) = \lambda(P_1(X+1) - P_1(X)) + (P_2(X+1) - P_2(X)) = \lambda \varphi_n(P_1) + \varphi_n(P_2).$$

2. Si $P \in Ker(\varphi_n)$, *alors* $\varphi_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, *i.e.* $P(X+1) = P(X)$.
Ceci implique que P *est constant, car* $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots = P(k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *donc le polynôme* $Q(X) = P(X) - P(0)$ *a une infinté de racines, ce qui entraîne sa nullité.*
Réciproquement, tout polynôme constant vérifie $P(X+1) = P(X)$, *donc on a l'égalité*

$$Ker(\varphi_n) = \mathbb{R}_0[X]$$

(le noyau de φ_n *est formé des polynômes constants, c'est un espace de dimension* 1*).*

3. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(Im(\varphi_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(Ker(\varphi_n)) = n + 1 - 1 = n.$$

De plus, la famille $(\varphi_n(1), \varphi_n(X), \cdots, \varphi_n(X^n))$ *est génératrice de* $Im(\varphi_n)$ *(puisque c'est l'image d'une base de l'espace source). Vu que*

$$\varphi_n(1) = 0, \qquad \forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \varphi_n(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} X^p \in \mathbb{R}_{k-1}[X],$$

on a $Im(\varphi_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. *Mais* $\dim(Im(\varphi_n)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, *donc*

$$Im(\varphi_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

4. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P) = X$. Puisque $\varphi(X^k)$ est de degré $k-1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P est nécessairement de degré ≤ 2 (sinon, son monôme dominant est X^k avec $k \geq 3$, et l'image $\varphi(P)$ aurait pour monôme dominant X^{k-1}, ce qui entraînerait $\deg(\varphi(P)) \geq 2$, impossible). On a donc*
$$P = aX^2 + bX + c,$$
et
$$\varphi(P) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = a(2X+1) + b = 2aX + (a+b).$$
D'où $\varphi(P) = X \iff a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{-1}{2} \iff P = \frac{1}{2}(X^2 - X) + c$.
Finalement, les antécédents de X par φ sont les polynômes
$$P = \frac{1}{2}(X^2 - X) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

5.
   - *$Ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(X+1) = P(X)\} = \mathbb{R}_0[X]$ (l'ensemble des polynômes constants).*
   - *On sait déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = \varphi_n(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que $Im(\varphi)$ contient tous les sous-espaces $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie*
   $$Im(\varphi) = \mathbb{R}[X].$$

   Remarque.
   Voici un exemple d'endomorphisme surjectif et non injectif (ça n'est possible qu'en dimension infinie).

Corrigé de l'exercice 14. • *On procède par opérations élémentaires sur les lignes de A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

Cette dernière matrice est échelonnée, avec 2 pivots, donc son rang est 2. Vu que la relation d'équivalence en lignes des matrices conserve le rang, on en déduit que $rg(A) = 2$.

Remarque.
En faisant encore une opération élémentaire, on obtient la matrice échelonnée **réduite** *équivalente à A : il s'agit de*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}.$$
"Réduite" signifie que chaque pivot est égal à 1 et est l'unique coefficient non nul de sa colonne.

• *En procédant de même, on obtient*
$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b/a \\ 0 & 1 & 0 & -b^2/a^2 \\ 0 & 0 & 1 & b^3/a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - b^4/a^4 \end{pmatrix}.$$
Il y a trois ou quatre pivots, selon les valeurs de a, b. On a
$$1 - b^4/a^4 = 0 \iff b^4 = a^4 \iff b = a \text{ ou } b = -a.$$
Deux cas se présentent alors :

** Si $b \neq a$ et $b \neq -a$, alors $rg(B) = 4$.*
** Si $b = a$ ou $b = -a$, alors $rg(B) = 3$.*

Corrigé de l'exercice 15.
On a $A = I_3 + N$, *avec* $N = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Vu que N et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Puisque $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geq 3$, on a

$$\forall n \geq 2, \qquad A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3n & n(4-3n) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que cette formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & -3n & n(4-3n) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 16. *1. On peut décomposer $A = D + N$, avec* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et*
$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *mais on ne peut pas utiliser la formule du binôme, car $DN \neq ND$.*

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On conjecture

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n \\ 0 & 1 & \varepsilon_n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Cela se vérifie facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
- *Pour $n = 0$, c'est évident car $A^0 = I_3$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n \\ 0 & 1 & \varepsilon_n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, *alors*

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & n \\ 0 & 1 & \varepsilon_n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & n + 2\varepsilon_n + (-1)^n \\ 0 & 1 & \varepsilon_n + (-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Mais on a les relations : $\begin{cases} \varepsilon_n + (-1)^n = \varepsilon_{n+1} \\ 2\varepsilon_n + (-1)^n = 1 \end{cases}$ *(faciles à vérifier en distinguant les cas selon la parité de n), donc*

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & n+1 \\ 0 & 1 & \varepsilon_{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que la propriété est héréditaire.
On peut aussi remarquer que $\varepsilon_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$*, d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n \\ 0 & 1 & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$