Annexe B : Révisions d'algèbre linéaire de TSI 1

A chaque fois, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Définition 1 (Espace vectoriel).
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** (abrégé en "$\mathbb{K}$-ev") est un ensemble E muni de deux lois :

- une loi appelée "addition", notée $+ : E \times E \to E$: à un couple $(x, y) \in E^2$, on associe un élément $x + y \in E$;
- une loi appelée "multiplication externe", notée $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$: à un couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on associe un élément $\lambda \cdot x \in E$ (on notera aussi λx, sans le "point") ;

qui vérifient les propriétés suivantes :

- l'addition est commutative ($x + y = y + x$), associative ($(x + y) + z = x + (y + z)$), possède un élément neutre noté 0_E ($x + 0_E = 0_E + x = x$ pour tout $x \in E$) et chaque élément $x \in E$ possède un "symétrique", noté $-x$ (il vérifie $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$).
- la multiplication externe possède les propriétés suivantes :
  $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
  $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
  $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$;
  $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$.

Vocabulaire.
Les éléments de E sont appelés "vecteurs" et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés "scalaires" ou "nombres".

Exemple.
Liste de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels classiques (à connaître par coeur) :

- l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des listes à n éléments de $\mathbb{K}$ (notées en ligne ou en colonne), où $n \in \mathbb{N}^*$;
- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (en général, on identifie les "matrices-colonne" de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aux éléments de $\mathbb{K}^n$) ;
- l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ (suites réelles ou complexes) ;
- l'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions $A \to \mathbb{R}$, où A est une partie de $\mathbb{R}$. On le note aussi $\mathbb{R}^A$.
- plus généralement : l'ensemble $\mathcal{F}(X; F)$ des fonctions $X \to F$, où X est un ensemble quelconque et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On le note aussi F^X.

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2 (Sous-espace vectoriel).
Un **sous-espace vectoriel** de E (abrégé en "sev de E") est une partie $F \subset E$ telle que :

(i) $0_E \in F$;
(ii) $\forall(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
(iii) $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Proposition 3.
Si F est un sev de E, alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (et les lois sur F sont les restrictions à F des lois sur E).

Proposition 4 (Caractérisation des sev).
F est un sev de E ssi $0_E \in F$ et $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times F \times F,\ \lambda \cdot x + y \in F$.

Proposition 5 (Intersection de sev).
Toute intersection (même infinie) de sev de E est un sev de E.

Définition 6 (Somme de deux sev).
Si F et G sont deux sev de E, alors on note $F+G$ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ de la forme $x = x_1+x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

Proposition 7 (Structure de la somme de deux sev).
La somme $F + G$ est un sev de E, et c'est le plus petit sev de E contenant F et G.

Définition 8 (Somme directe).
On dit que deux sev F et G sont **en somme directe** si tout vecteur $x \in F + G$ possède une décomposition en somme unique, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1, x_3 \in F \\ x_2, x_4 \in G \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, on note $F + G = F \oplus G$.

Proposition 9 (Caractérisation d'une somme directe).
F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 10 (Sev supplémentaires).
On dit que deux sev F et G sont **supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$** s'ils sont en somme directe et si $F+G = E$ (on abrège en $F \oplus G = E$).

Attention, ne pas confondre "somme directe" et "supplémentaires" !

II Familles finies de vecteurs

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1, \cdots, x_n)$ une **famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs de $\boldsymbol{E}$**, où $n \in \mathbb{N}$ (c'est le "cardinal" de la famille, c'est-à-dire son nombre de vecteurs pas nécessairement distincts).

Convention.
Si $n = 0$, alors la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est vide (aucun vecteur).

Définition 11 (Combinaison linéaire d'une famille).
Une **combinaison linéaire de la famille $\boldsymbol{(x_1, \cdots, x_n)}$** est un vecteur $x \in E$ de la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

où les λ_k sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Convention.
Si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ (somme vide), donc la seule combinaison linéaire de la famille vide est le vecteur nul 0_E.

Notation.
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ se note $\boldsymbol{Vect(x_1, \cdots, x_n)}$.

Proposition 12 (Structure du Vect).
L'ensemble $Vect(x_1, \cdots, x_n)$ est le plus petit sev de E qui contient les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$. On dit que $Vect(x_1, \cdots, x_n)$ est le **sev engendré** *par la famille $(x_1, \cdots, x_n)$.*

Définition 13 (Famille génératrice).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **génératrice de E** (ou "engendre E") si $Vect(x_1, \cdots, x_n) = E$, ce qui signifie que les éléments de E sont exactement les combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$.

Proposition 14 (Extension d'une famille génératrice).
Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est génératrice de E et que l'on rajoute un vecteur $x \in E$, alors la "sur-famille" $(x_1, \cdots, x_n, x)$ est aussi génératrice de E.

Définition 15 (Famille liée).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **liée** s'il existe une combinaison linéaire nulle et non triviale (à coefficients non tous nuls) de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$, c'est-à-dire :

$$\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0), \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E.$$

Proposition 16 (Extension d'une famille liée).
Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée et que l'on rajoute un vecteur $x \in E$, alors la "sur-famille" $(x_1, \cdots, x_n, x)$ est aussi liée.

Proposition 17 (Caractérisation des familles liées).
$(x_1, \cdots, x_n)$ est liée ssi un des x_k est combinaison linéaire des autres (mais lequel ?)

Définition 18 (Famille libre).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire que la seule combinaison linéaire nulle de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est la combinaison triviale (à coefficients tous nuls) :

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right).$$

Proposition 19 (Réduction d'une famille libre).
Toute "sous-famille" d'une famille libre est elle-même libre (en enlevant des vecteurs à une famille libre, elle reste libre).

Définition 20 (Base).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est une **base de E** si elle est libre et génératrice de E.

Proposition 21 (Caractérisation des bases).
Il y a équivalence entre :

(i) *$(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E ;*

(ii) *$(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille libre maximale de E (au sens où elle est libre, et si on rajoute un vecteur, elle ne l'est plus) ;*

(iii) *$(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille génératrice minimale de E (au sens où elle est génératrice de E, et si on retire un vecteur, elle ne l'est plus).*

Proposition 22 (Ecriture en coordonnées).
Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique liste $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. On dit que $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ sont les **coordonnées** *de x dans la base $\mathcal{B}$.*

III Espaces vectoriels de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 23 (Espace vectoriel de dimension finie).
On dit que E est **de dimension finie** si E possède (au moins) une famille génératrice finie $(x_1, \cdots, x_n)$.

Théorème 24 (Existence de bases).
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède des bases, et elles ont toutes le même cardinal (c'est-à-dire le même nombre de vecteurs). Ce nombre est appelé **la dimension de E** *(noté $\dim(E)$), c'est un entier $n \in \mathbb{N}$.*

On a en fait les résultats suivants, plus précis :

Proposition 25 (Base incomplète, base excédentaire).
Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie,

- *(i) toute famille libre de E peut être complétée en une base de E (ce résultat est parfois appelé "théorème de la base incomplète") ;*
- *(ii) de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E (ce résultat est parfois appelé "théorème de la base excédentaire").*

Remarque.
Le seul $\mathbb{K}$-ev de dimension 0 est l'espace nul $\{0_E\}$ (la famille vide en est une base).

Vocabulaire.
Les $\mathbb{K}$-ev de dimension 1 sont appelés des **droites**, et ceux de dimension 2 sont appelés des **plans**.

Proposition 26 (Caractérisation des bases à l'aide du cardinal).
Si E est de dimension finie (notée $n = \dim(E)$), et si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, il y a équivalence entre :

- *(i) $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre ;*
- *(ii) $(x_1, \cdots, x_n)$ est génératrice de E ;*
- *(iii) $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E.*

Remarque.
Ce résultat est très utile pour montrer qu'une famille est une base de E **lorsqu'on connaît déjà la dimension de E**. *Il suffit alors de montrer que la famille en question est libre (par exemple) et possède le "bon" nombre de vecteurs.*

Proposition 27 (Dimension d'un sev).
Si E est de dimension finie, et si F est un sev de E, alors :

- *(i) F est lui-même de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;*
- *(ii) $\dim(F) = \dim(E) \implies F = E$.*

Remarque.
Ce résultat est très utile pour montrer que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont égaux : il suffit de montrer qu'un est un sev de l'autre et qu'ils ont la même dimension.

Définition 28 (Rang d'une famille de vecteurs).
Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est une famille de p vecteurs de E, alors on appelle **rang de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$** la dimension de l'espace engendré par cette famille : $rg(x_1, \cdots, x_p) = \dim(Vect(x_1, \cdots, x_p))$.

Remarque.
Le rang de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ *est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants de la famille.*

Proposition 29 (Majoration du rang).
On a $rg(x_1, \cdots, x_p) \leq p$*, mais si* E *est de dimension finie, on a aussi* $rg(x_1, \cdots, x_p) \leq \dim(E)$*.*

Proposition 30 (Base et dimension d'une somme directe).
Si E *est de dimension finie et si* F, G *sont deux sev de* E *en somme directe, alors*

(i) *en réunissant une base de* F *et une base de* G *(dans n'importe quel ordre), on obtient une base de* $F \oplus G$ *;*

(ii) $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition 31 (Formule de Grassmann).
Si E *est de dimension finie, et si* F, G *sont des sev de* E*, alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

IV Applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev (pas nécessairement de dimension finie).

Définition 32 (Application linéaire).
On dit qu'une application $f : E \to F$ est **linéaire** si

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;

(ii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque.
Pas besoin de vérifier en plus que $f(0_E) = 0_F$*, c'est automatiquement entraîné par ces deux propriétés.*

Proposition 33 (Caractérisation des applications linéaires).
f *est linéaire ssi* $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$*.*

Définition 34 (Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme).
On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire $E \to E$.
On appelle **isomorphisme** entre E et F toute application linéaire bijective $E \to F$.
On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective $E \to E$ ("auto=endo+iso").

Proposition 35 (Opérations algébriques sur les applications linéaires).
La somme de deux applications linéaires est linéaire, la multiplication d'une application linéaire par un scalaire aussi, et la composée de deux applications linéaires aussi.

Proposition 36 (Linéarité de la réciproque).
Si $f : E \to F$ *est linéaire et bijective, alors sa réciproque* $f^{-1} : F \to E$ *est aussi linéaire (et bijective !).*

Preuve.
Soient deux vecteurs y_1, y_2 dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$. On va montrer que

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).$$

Vu que f est bijective, les vecteurs y_1 et y_2 possèdent chacun un unique antécédent par f : il existe un unique $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et un unique $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Donc

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = f^{-1}(\lambda f(x_1) + f(x_2)).$$

Mais f est linéaire, donc $\lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda x_1 + x_2)$. D'où :

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = f^{-1}(f(\lambda x_1 + x_2)) = (f^{-1} \circ f)(\lambda x_1 + x_2) = \lambda x_1 + x_2.$$

Enfin, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ (puisque x_1 est l'unique antécédent de y_1) et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, donc

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2),$$

ce qui montre bien la linéarité de l'application $f^{-1} : F \to E$.

Définition 37 (Noyau d'une application linéaire).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. **Le noyau de f**, noté $Ker(f)$, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$.

Proposition 38 (Propriétés du noyau).
$Ker(f)$ est un sev de E et f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$.

Preuve.
- Montrons que $Ker(f)$ est un sev de E.
  On a $0_E \in Ker(f)$ car $f(0_E) = 0_F$ (puisque f est linéaire).
  Soit $x_1, x_2 \in Ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $f(x_1) = f(x_2) = 0_F$, donc par linéarité de f :

  $$f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F,$$

  ce qui montre que $\lambda x_1 + x_2 \in Ker(f)$.
- Montrons que (f injective $\Rightarrow Ker(f) = \{0_E\}$).
  Supposons f injective et montrons que $Ker(f) = \{0_E\}$.
  Si $x \in Ker(f)$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc $x = 0_E$ par injectivité de f.
  Ceci montre que $Ker(f) \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque est immédiate puisque $0_E \in Ker(f)$.
  Donc $Ker(f) = \{0_E\}$.
- Montrons que ($Ker(f) = \{0_E\} \Rightarrow f$ injective).
  Supposons $Ker(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
  Si $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1, x_2 \in E$, alors par linéarité de f, on obtient $f(x_1 - x_2) = 0_F$, c'est-à-dire $x_1 - x_2 \in Ker(f)$. Mais comme $Ker(f) = \{0_E\}$, on en déduit que $x_1 - x_2 = 0_E$, donc $x_1 = x_2$.
  Ceci montre l'injectivité de f.

Définition 39 (Image d'une application linéaire).
L'image de f, notée $Im(f)$ est l'ensemble des $y \in F$ qui s'écrivent $y = f(x)$ avec $x \in E$ (c'est-à-dire les $y \in F$ ayant au moins un antécédent par f).

Proposition 40 (Propriétés de l'image).
$Im(f)$ est un sev de F et f est surjective ssi $Im(f) = F$.

Preuve.
- Montrons que $Im(f)$ est un sev de F.
  On a $0_F \in Im(f)$ car $0_F = f(0_E)$ (donc 0_F a un antécédent : 0_E).
  Soit $y_1, y_2 \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de l'image, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Donc, par linéarité de f :

  $$\lambda y_1 + y_2 = \lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda x_1 + x_2).$$

  Cette écriture montre que $\lambda y_1 + y_2 \in Im(f)$, puisque ce vecteur a un antécédent dans E : $\lambda x_1 + x_2$.
- Montrons que f est surjective ssi $Im(f) = F$.
  C'est direct d'après la définition de la surjectivité : $Im(f)$ est l'ensemble des vecteurs de F qui admettent un antécédent par f, et "f surjective" signifie que tous les vecteurs de F admettent un antécédent par f. Donc clairement, "f surjective" signifie que $Im(f) = F$.

Définition 41 (Rang d'une application linéaire).
Si $Im(f)$ est de dimension finie, on appelle **rang de f** la dimension de son image : $rg(f) = \dim(Im(f))$.

Proposition 42 (Lien entre injectivité et surjectivité quand $\dim(E) = \dim(F)$).
Si E et F sont de dimension finie, si $f : E \to F$ est linéaire et si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective ssi f est surjective.

Remarque.
Ce résultat est très utile pour montrer qu'une application linéaire **en dimension finie** *est bijective : il suffit de vérifier que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, et que l'application est injective (par exemple).*

Proposition 43 (Théorème du rang).
Si $f : E \to F$ est linéaire et si E est de dimension finie, alors :

(i) $Im(f)$ est automatiquement de dimension finie ;

(ii) $\dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(Ker(f)) + rg(f)$.

V Représentations matricielles

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Notation.
Etant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on note $\boldsymbol{[x]_{\mathcal{B}}}$ ou $\boldsymbol{Mat_{\mathcal{B}}(x)}$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \iff [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition 44 (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base).
Etant donnée une base $\mathcal{B}$ de E et une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs de E, on appelle **matrice de la famille $\boldsymbol{(x_1, \cdots, x_p)}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$** la matrice dont les colonnes sont les coordonnées respectives de $x_1, \cdots, x_p$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_p)$ cette matrice.

On fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, avec $\dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$.
On fixe également une application linéaire $f : E \to F$, une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$ de F.

Proposition 45 (Engendrement de l'image d'une application linéaire).
Etant donné un vecteur $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in E$, on a $f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k)$ par linéarité de f, donc **$\boldsymbol{f(x)}$ est connu dès que l'on connaît $\boldsymbol{f(e_1), \cdots, f(e_p)}$** *(l'image de la base $\mathcal{B}_E$ par f).*
Plus précisément, on a

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p)).$$

C'est cette idée qui fonde la **représentation matricielle d'une application linéaire** :

Définition 46 (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases).
On appelle **matrice de $\boldsymbol{f}$ dans les bases $\boldsymbol{\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)}$ (au départ) et $\boldsymbol{\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)}$ (à l'arrivée)** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les p colonnes sont les coordonnées respectives de $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$. On la note $Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

Remarque.
En notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$, on a donc

$$Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = Mat_{(u_1, \cdots, u_n)}(f(e_1), \cdots, f(e_p)),$$

ou de façon abrégée :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E)).$$

Proposition 47 (Formule de l'image d'un vecteur).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$[f(x)]_{\mathcal{B}_F} = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times [x]_{\mathcal{B}_E}.$$

Proposition 48 (Matrice de la composée de deux applications linéaires).
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, et si $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F, G, alors

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Proposition 49 (Lien entre bijectivité et inversibilité).
Une application linéaire $f : E \to F$ est bijective ssi sa matrice A dans n'importe quelles bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est inversible (ce qui signifie que A est carrée et qu'il existe B de même format que A telle que $AB = BA = I_n$). Et dans ce cas, A^{-1} est la matrice de $f^{-1} : F \to E$ (dans les bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E$).

Définition 50 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice).
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par $f(X) = AX$ (le produit de la matrice A par le vecteur colonne X) est appelée application linéaire canoniquement associée à A.
En fait, A est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ (au départ) et $\mathbb{K}^n$ (à l'arrivée).

Définition 51 (Noyau, image, rang d'une matrice).
Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **noyau de A** le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A :
$Ker(A)$ est donc l'ensemble des vecteurs colonne $X \in \mathbb{K}^p$ tels que $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$.
De même, **l'image** $Im(A)$ est l'ensemble des vecteurs colonne $Y \in \mathbb{K}^n$ qui s'écrivent $Y = AX$ avec $X \in \mathbb{K}^p$.
Enfin, on appelle **rang de** A la dimension de $Im(A)$.

Proposition 52 (Engendrement de l'image d'une matrice).
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors les p colonnes de A, notées $C_1, \cdots, C_p$, forment une famille génératrice de l'image de A :

$$Im(A) = Vect(C_1, \cdots, C_p) \subset \mathbb{K}^n.$$

Remarque.
Ainsi, en "observant" les colonnes de A, on peut obtenir des informations sur l'image de A, donc en particulier sur le rang de A **(puisque $rg(A)$ est le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de A)**.

Théorème 53 (Invariance du rang par changement de base).

- *Le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ est égal au rang de la matrice de cette famille dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$.*
- *Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.*

Théorème 54 (Lien entre rang et pivots).
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est égal au rang du système linéaire homogène $AX = 0$, c'est-à-dire au nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite en lignes associée à ce système.

VI Exercices

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

1) Exercices à traiter en priorité

Exercice 1 (Base et équations d'un sev).

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^5$, on considère $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On note $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$.

1. La famille $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est-elle libre ? Quel est son rang ?
2. Déterminer une base de F, notée $\mathcal{B}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace F. A-t-on besoin de la base $\mathcal{B}$ pour cela ?
4. A partir du système d'équations cartésiennes obtenu :
   (a) obtenir un système d'équations paramétriques de F,
   (b) puis retrouver une base de F.

Exercice 2 (Calcul du rang d'une famille de vecteurs).
Soit a un réel et soient $\overrightarrow{x} = (1, 1, a)$, $\overrightarrow{y} = (1, a, 1)$ et $\overrightarrow{z} = (a, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *(on sera amené à distinguer plusieurs valeurs de a).*

Exercice 3 (Familles libres, liées).
On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_1 : x \to 1 \\ f_2 : x \to \cos(x) \\ f_3 : x \to \cos(2x) \\ f_4 : x \to \cos^2(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1 : x \to 1 \\ g_2 : x \to x^3 + 1 \\ g_3 : x \to |x^3| \end{cases} .$$

1. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ou liée ?
2. La famille (g_1, g_2, g_3) est-elle libre ou liée ?

Exercice 4 (Exemples et contre-exemples de sev).
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, pour les lois usuelles, des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 0\}, \qquad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\}, \qquad E_3 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n = o(1/n)\}$$

$$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]\}, \qquad E_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(2) = 0\}, \qquad E_6 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 1\}.$$

On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles (ou des fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cela revient au même), et que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Exemple rectangulaire).
Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, -2x + y + 3z).$$

1. On note respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Sans démontrer la linéarité de f, donner la matrice A de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par :

   $$b'_1 = (1, -2, 3), \qquad b'_2 = (-1, 0, 1), \qquad b'_3 = (1, 1, -1)$$

   et $\mathcal{C}' = (c'_1, c'_2)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définie par :

   $$c'_1 = (2, 1), \qquad c'_2 = (3, 1).$$

   On admet que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}'$ une base de $\mathbb{R}^2$.
   Déterminer la matrice A' de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$.

Exercice 6 (Puissance de matrice avec polynôme annulateur).
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire $a_0I_2 + a_1A + a_2A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_2 et A.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$).
Soit f l'application de $E = \mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, 2x - y + 3z).$$

1. Etude de f
   (a) Montrer en détail que f est un endomorphisme de E.
   (b) Donner la matrice de f dans la base canonique de E.
   (c) Déterminer une base de $Ker(f)$.
   (d) Déterminer une base de $Im(f)$.
2. Etude d'une projection
   (a) Montrer que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$ est un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E.
   (b) Soit $p : E \to E$ la projection sur H parallèlement à $Ker(f)$. Pour tout vecteur $X = (x, y, z) \in E$, déterminer l'expression de $p(X)$ en fonction de X.
   (c) Donner la matrice de p dans la base canonique de E.

Exercice 8 (Exemple avec des polynômes).
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' - XP' - 3P.$$

1. Montrer en détail que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $F = \mathbb{R}_3[X]$ est stable par f.
   Cela signifie que $f(F) \subset F$, ou encore que pour tout $P \in F$, on a $f(P) \in F$.
3. On note g la restriction de f à F ; c'est donc un endomorphisme de F. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de F.
4. Déterminer une base de $Ker(g)$.
5. Montrer que $Im(g) = \mathbb{R}_2[X]$.

2) Exercices supplémentaires

Exercice 9 (Un classique).
Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où n est un entier naturel non nul.
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 10 (Calculs de bases et de dimension).
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels puis en déterminer une base et la dimension :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$.
2. $B = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = 0\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé).
3. $C = Vect(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x - 1,\ f_3(x) = 2 - x$.

Exercice 11 (*Réunion de deux sous-espaces vectoriels).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F, G deux sev de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 12 (Calcul d'inverse en dimension n).
Vérifier que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}).$$

Exercice 13 (*L'opérateur de différence dans les polynômes).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Vérifier que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $Ker(\varphi_n)$.
3. Calculer $Im(\varphi_n)$.

On considère maintenant l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

4. Calculer le(s) antécédent(s) par φ du polynôme X.
   On cherchera d'abord le degré de ces antécédents.
5. Calculer $Ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$.

Exercice 14 (Calcul de rang de matrices).
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 15 (Puissance de matrice avec la formule du binôme).
En utilisant la formule du binôme, calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (Puissance de matrice par récurrence).
On souhaite calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Peut-on utiliser la formule du binôme ? Pourquoi ?
2. Calculer les premières puissances, conjecturer une formule pour A^n puis la démontrer par récurrence.