Annexe A : Suites réelles et complexes
Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 1. *1. Le terme initial u_0 est strictement positif par hypothèse (c'est a).*
A $n \in \mathbb{N}$ fixé, si on suppose $u_n > 0$, alors on a

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$$

(c'est le produit de deux réels strictement positifs). Ceci montre (par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.

2. Etudions la monotonie de la suite (u_n).
Puisque $u_n > 0$, on a $0 < e^{-u_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(e^{-u_n} - 1\right) < 0,$$

ce qui montre que (u_n) est strictement décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc elle converge.
*En notant $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, on a $\ell \geq 0$ (***attention, pas forcément $\ell > 0$, car les limites ne sont compatibles qu'avec les inégalités larges***) et :*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n \times e^{-\lim_{n\to+\infty} u_n} = \ell e^{\ell}.$$

Si $\ell \neq 0$, cela amène (en simplifiant par ℓ) $1 = e^{\ell}$, et donc $\ell = 0$, ce qui est contradictoire. Donc $\ell = 0$, et la suite (u_n) converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 2.
On rappelle que $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.
Pour les six premiers exemples, utiliser les croissances comparées (lorsque $n \to +\infty$) entre les suites (n^α), $(\ln^\beta n)$, (q^n) et $(n!)$ pour repérer quels termes sont négligeables devant les autres et trouver ainsi un équivalent simple de u_n.
Pour l'exemple 7), faire des développements asymptotiques, en utilisant les DL classiques en 0.
Pour l'exemple 8), faire un développement asymptotique de $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}$, en réécrivant

$$\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right).$$

Réponses :

1) $u_n \sim 2n^2$.
2) $u_n \sim n^2$.
3) $u_n \sim 2^n$.
4) $u_n \sim 5^n$.
5) $u_n \sim n!$.
6) $u_n \sim e^n$.
7) $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$.
8) $u_n \sim 5n$.

Corrigé de l'exercice 3. *1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = (1+2i)$ (constante), donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 1+2i$.*
En outre,

$$A = \sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} ((1+3i) + k(1+2i)) = (1+3i)\underbrace{\sum_{k=0}^{10} 1}_{=11} + (1+2i)\underbrace{\sum_{k=0}^{10} k}_{=55} = 66 + 143i.$$

(b) *Non, la suite (u_n) diverge, car sa partie réelle $Re(u_n) = 1 + n$ est divergente (sa partie imaginaire aussi d'ailleurs...).*

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = -3e^{i\frac{(n+3)\pi}{3}} = 3e^{i\frac{n\pi}{3}} = 3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $B = \sum_{k=5}^{10} v_k = \sum_{k=5}^{10} v_0 q^k = v_0 q^5 \times \dfrac{1-q^6}{1-q}$.*
Or, $q^6 = e^{i2\pi} = 1$, donc $B = 0$.

(d) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{3n} = 3e^{in\pi} = 3(-1)^n$, et cette suite réelle diverge (elle admet elle même deux suites extraites de limites différentes). Donc (v_n) est divergente, puisqu'elle admet une suite extraite divergente.*

(e) *On réécrit w_n sous forme algébrique : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{n^2}{n^2+9} - i\left(\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{3n}{n^2+9}\right)$.*
D'après la proposition 4, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+9}\right) - i \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1} + \frac{3n}{n^2+9}\right) = 1 - i.$$

2. (a) *On remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$, donc (par récurrence)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0.$$

D'après les propriétés du module, on a alors

$$|z_n| = \left|\frac{1+i}{2}\right|^n |z_0| = \frac{|z_0|}{\sqrt{2}^n},$$

donc $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$, ce qui montre que la suite (z_n) converge vers 0.

(b) *En utilisant encore une fois la proposition 4, on en déduit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Corrigé de l'exercice 4. 1. *Si $a = 1$, on a $u_{n+1} = u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison b. On a alors $u_n = u_0 + nb$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Si $b = 0$, on a $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison a. On a alors $u_n = u_0 * a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. (a) **Première méthode**
Par définition de la suite (u_n), on a

$$u_1 = au_0 + b, \qquad u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + ab + b,$$

$$u_3 = au_2 + b = a(a^2u_0 + ab + b) + b = a^3u_0 + a^2b + ab + b.$$

On conjecture alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n u_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)b = a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b$$

(ce qui a du sens car $a \neq 1$).
Vérification par récurrence :

- *la formule est vraie pour $n = 0$ car $a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b = 1 * u_0 + 0 * b = u_0$ dans ce cas.*
- *pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, si on a $u_n = a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b$, alors*

$$u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b\right) + b = a^{n+1}u_0 + \frac{1-a^{n+1}}{1-a} b,$$

donc la formule est bien héréditaire.

On a donc bien montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n u_0 + \dfrac{1-a^n}{1-a} b$.

(b) **Seconde méthode**
Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - c = au_n + b - c = a\left(u_n + \frac{b-c}{a}\right),$$

donc (v_n) *est géométrique (de raison* a*) si et seulement si* $u_n + \frac{b-c}{a} = v_n$*, ce qui équivaut à* $\frac{b-c}{a} = -c$*, ou encore à* $c = \frac{b}{1-a}$*.*
La suite $(v_n) = \left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$ *étant géométrique de raison* a*, nous avons*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = a^n * v_0 = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right),$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + c = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a}b.$$

Corrigé de l'exercice 5. • *Première méthode (en s'inspirant de l'exercice précédent) :*
On calcule directement le terme général par récurrence :

$$z_n = \frac{i}{2}z_{n-1} + 1 = \frac{i}{2}\left(\frac{i}{2}z_{n-2} + 1\right) + 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 z_{n-2} + \frac{i}{2} + 1,$$

puis

$$z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^2\left(\frac{i}{2}z_{n-3} + 1\right) + \frac{i}{2} + 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^3 z_{n-3} + \left(\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{i}{2} + 1.$$

On conjecture alors la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n z_0 + \left(1 + \frac{i}{2} + \cdots + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\right) = \left(\frac{i}{2}\right)^n z_0 + \frac{1-\left(\frac{i}{2}\right)^n}{1-\frac{i}{2}},$$

qui se vérifie facilement par récurrence. Enfin, on fait tendre $n \to +\infty$*, et on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{5}(2+i).$$

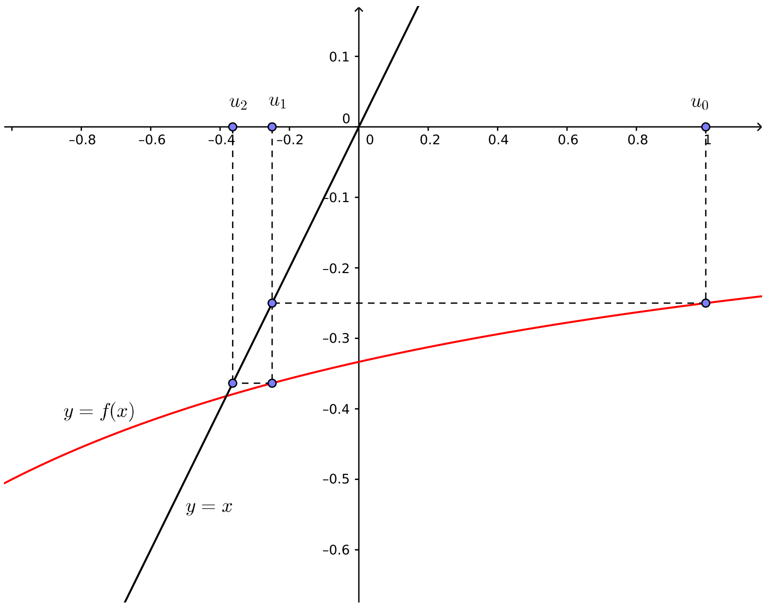
- *Deuxième méthode (en s'inspirant aussi de l'exercice précédent) :*
  on trouve $c \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $v_n = u_n - c$ *soit géométrique, etc.*

- *Troisième méthode (plus astucieuse) :*
  Tout d'abord, identifions les limites possibles de la suite : **si** (z_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ *alors, en passant à la limite dans la relation* $z_{n+1} = \dfrac{i}{2}z_n + 1$*, on obtient* $\ell = \dfrac{i}{2}\ell + 1$*, c'est-à-dire* $\ell = \dfrac{2}{5}(2+i)$*.*
  Voyons maintenant si la suite (z_n) *converge : on doit étudier* $u_n = z_n - \ell = z_n - \dfrac{2}{5}(2+i)$*. On a*

$$u_{n+1} = z_{n+1} - \ell = \left(\frac{i}{2}z_n + 1\right) - \left(\frac{i}{2}\ell + 1\right) = \frac{i}{2}(z_n - \ell) = \frac{i}{2}u_n.$$

La suite $u_n = z_n - \dfrac{2}{5}(2+i)$ *est donc géométrique de raison* $\dfrac{i}{2}$*, d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*, et on déduit* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{2}{5}(2+i)$*.*

Corrigé de l'exercice 6. *1. Représentation graphique : on a représenté la fonction* $f : x \mapsto \frac{-1}{3+x}$*, la droite* $y = x$*, et les premiers termes* u_0*,* u_1*,* u_2*.*



Conjecture : la suite (u_n) semble décroissante et convergente, vers un point ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

2. *Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Puisqu'on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \times (3 + u_n) = -1,$$

on en déduit (par passage à la limite) que $\ell \times (3 + \ell) = -1$, donc

$$\ell \neq -3, \qquad \ell^2 + 3\ell + 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\ell = x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \quad ou \quad \ell = x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Il n'y a donc que deux limites possibles.

3. *D'une part, on a $f(x_2) = x_2$. D'autre part, f est croissante sur l'intervalle $[x_2, +\infty[$, puisque*

$$\forall x \geq x_2 > -3, \qquad f'(x) = \frac{1}{(3+x)^2} \geq 0.$$

On a donc

$$x_2 \leq x \leq 1 \implies f(x_2) \leq f(x) \leq f(1) \implies x_2 \leq f(x) \leq -0.25 < 1.$$

Ceci montre que l'intervalle $[x_2; 1]$ est stable par f.
On en déduit par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_2 \leq u_n \leq 1$:

- *C'est vrai pour $n = 0$, puisque $u_0 = 1$.*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé : si $u_n \in [x_2; 1]$, alors $f(u_n) \in [x_2; 1]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [x_2; 1]$.*

4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{1}{3+u_n} - u_n = -\frac{u_n^2+3u_n+1}{3+u_n}$.*
Ceci se factorise en

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - x_1)(u_n - x_2)}{u_n + 3} \leq 0,$$

puisque $u_n \geq x_2 > x_1 > -3$. La suite (u_n) est donc décroissante. Puisqu'elle est également minorée (par x_2), elle converge vers une limite $\ell \geq x_2$. D'après la question 2, cette limite est nécessairement x_2. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_2$.

Corrigé de l'exercice 7. *1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+2} = (2\cos x)u_{n+1} - u_n, \qquad u_{2n} = 2u_n^2 - 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, en passant à la limite dans ces relations, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}\ell(1-\cos(x))=0\\(\ell-1)(2\ell+1)=0\end{array}\right. .$$

Le cas $\ell = 0$ est contradictoire avec la seconde relation, donc $\ell \neq 0$, ce qui implique

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(x)=1\\\ell\in\{1,-\frac{1}{2}\}\end{array}\right.$$

On a donc $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que la suite (u_n) est constante égale à 1.
Réciproquement, la suite constante égale à 1 est évidemment convergente.
On a donc montré l'équivalence

$$(u_n)\ \textit{converge} \iff x \equiv 0\ [2\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.$$

2. *Ici, il faut utiliser les résultats établis précédemment pour u_n, ainsi que l'interaction entre les suites (u_n) et (v_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$v_{2n} = 2v_n u_n, \qquad v_{n+2} = (2\cos x)v_{n+1} - v_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si (v_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, en passant à la limite dans la seconde relation, on obtient

$$\ell(1-\cos(x)) = 0.$$

- *Si $\ell = 0$, alors on utilise la relation*

$$v_{n+1} = (\cos x)v_n + (\sin x)u_n,$$

qui entraîne $(\sin x)u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci impose $\sin(x) = 0$, car sinon, on aurait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et c'est impossible d'après la question précédente (puisque (u_n) ne peut converger que vers 1).

- *Si $\ell \neq 0$, alors on a $\cos(x) = 1$, et donc $\sin(x) = 0$.*

On a dans tous les cas $\sin(x) = 0$ et donc $x \in \pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que la suite (v_n) est constante égale à 0.
Réciproquement, la suite constante égale à 0 est évidemment convergente.
On a donc montré l'équivalence

$$(v_n)\ \textit{converge} \iff x \equiv 0\ [\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 0.$$

3. *Puisque $z_n = u_n + iv_n$, la suite (z_n) converge si et seulement si les suites (u_n) et (v_n) convergent, ce qui équivaut à $x \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire $z_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après les questions précédentes.*

Corrigé de l'exercice 8.
Notons $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} u_{3n}$ et $\ell_3 = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.
Notons également $x_n = u_{2n}$, $y_n = u_{3n}$, et $z_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *La suite (u_{6n}) est une sous-suite de (x_n), car $x_{3n} = u_{2(3n)} = u_{6n}$, mais aussi de la suite (y_n), car $y_{2n} = u_{3(2n)} = u_{6n}$. Vu qu'une sous-suite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite, on en déduit (puisque (x_n) et (y_n) convergent) que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} y_n = \ell_2.$$

Mais par unicité de la limite, cela impose $\ell_1 = \ell_2$.

- *De même, il suffit de montrer que les suites (y_n) et (z_n) ont une sous-suite commune pour avoir $\ell_2 = \ell_3$. C'est le cas, car pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} = y_{2n+1}, \qquad u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} = z_{3n+1}.$$

On en déduit que $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, et donc en particulier que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}.$$

Cela entraîne que (u_n) converge vers ℓ_1.