Annexe A : Suites réelles et complexes

Objectif : Réviser le chapitre "suites réelles", déjà étudié en TSI 1 (CH.13), puis présenter rapidement les suites à valeurs complexes, notamment la notion de convergence.

I Révisions sur les suites réelles

Points importants :

1. Définition de la **croissance/décroissance/monotonie** d'une suite réelle.
2. Définition du **caractère majoré/minoré/borné** d'une suite réelle.
3. Définition de la **convergence** "avec les epsilon".
   Savoir interpréter cette définition géométriquement : la distance $|u_n - \ell|$ est aussi petite que l'on veut (inférieure à $\varepsilon > 0$) du moment que l'indice n est suffisamment grand (c'est-à-dire dès que n dépasse un certain entier n_0 qui dépend du réel $\varepsilon > 0$ que l'on s'est fixé à l'avance).
4. **Propriété facile** : **si** une suite est convergente, **alors** elle est bornée, mais la réciproque est fausse (penser à la suite $(-1)^n$).
   Il est important de comprendre la démonstration de cette propriété (au moins avec un dessin).
5. Définition d'une **limite infinie** "avec les quantificateurs".
   Savoir interpréter cette définition géométriquement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ signifie que u_n est aussi grand que l'on veut (supérieur à $A > 0$) dès que n est suffisamment grand.
6. **Opérations sur les limites** : (limite d'une somme, produit, quotient, passage à la limite dans une inégalité, théorème des gendarmes, $\cdots$).
7. **Théorème de la limite monotone** : **si** une suite est croissante et majorée, **alors** elle converge (vers sa borne supérieure, c'est-à-dire le plus petit de ses majorants).
   Ce théorème est très utile pour montrer l'existence d'une limite, sans forcément pouvoir la calculer, et il marche aussi pour les suites décroissantes et minorées.
8. **Suites adjacentes** : deux choses à connaître :
   — la définition (l'une est croissante, l'autre décroissante, et la différence des deux tend vers 0).
   — le théorème : **si** deux suites sont adjacentes, **alors** elles convergent vers la même limite.
9. Définition d'une **suite extraite** (appelée aussi **sous-suite**).
   Remarque : les suites extraites "classiques" d'une suite (u_n) sont celles des termes "pairs/impairs" ((u_{2n}) et (u_{2n+1})) mais on peut faire plus général (par exemple (u_{3n}), (u_{n^2}), $\cdots$) .
10. **Deux résultats à connaître sur les suites extraites** :
    — Si (u_n) converge vers ℓ, alors n'importe quelle sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.
    Application : si on trouve une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui diverge, ou si on trouve deux sous-suites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ qui convergent vers des limites différentes, alors (u_n) diverge.
    — Si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la **même** limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.
11. Suites particulières : **suites arithmétiques, géométriques**.
    Définitions et formules **à connaître par coeur** (expression du terme général, somme des n premiers termes).
12. Etude d'une **suite récurrente** définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
    Comprendre comment la monotonie de la fonction f affecte celle de la suite (u_n), et comprendre le lien entre la convergence d'une telle suite (u_n) et les points fixes de f.
13. **Relations de comparaison** : **domination, négligeabilité, équivalence** de suites.
    Les définitions de "O", "o", "$\sim$" sont **à connaître par coeur**, il faut bien sûr également savoir les manipuler (attention, certaines opérations ne marchent pas avec les équivalents, notamment la somme et la composition !).
    Application : utiliser des équivalents de suites pour déterminer une limite.
14. **Théorèmes de croissances comparées** : savoir **par coeur** comment se comparent les suites "de référence" (n^α, $\ln^\beta(n)$, q^n, $n!$, $\cdots$), c'est-à-dire savoir qui est négligeable devant qui.

Attention ! Vous aurez également besoin d'un **bon savoir-faire sur les fonctions réelles** :

15. **Connaissance des fonctions "de base"** :
fonction valeur absolue, fonctions polynômes du second degré, fonctions logarithmes et exponentielles, fonctions puissances, fonctions trigonométriques ($\cos, \sin, \tan, \arccos, \arcsin, \arctan$).
16. **Etudes de fonctions réelles** : savoir déterminer le sens de variation d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à partir de sa dérivée (il est temps de réviser les formules de dérivées si elles ne sont pas connues).
La formule de dérivation composée $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$ *est très importante.*
17. **DL de référence en 0 (par coeur)** : $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\cdots$
Application : à l'aide des opérations sur ces DL de référence, savoir déterminer des limites de fonctions en un point, mais aussi un équivalent d'une suite (u_n)*, ou un développement asymptotique de* u_n *lorsque* $n \to +\infty$.
Par exemple :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dernière chose :

18. Il est indispensable de maîtriser le **raisonnement par récurrence** pour montrer certaines propriétés sur les suites (notamment des inégalités). N'oubliez donc pas de revoir ce type de raisonnement, sous ses différentes versions (récurrence "faible", "double", "forte", etc.)

Documents de référence :

- Cours TSI 1, CH. 13 : Suites réelles
- Cours TSI 1, CH. 3 : Fonctions de référence
- Cours TSI 1, CH. 22 : Formules de Taylor et développements limités
- Cours TSI 1, CH. 7 : Entiers et récurrence

II Suites à valeurs complexes

1) Définition et notations

Définition 1 (Suite à valeurs complexes).
Une **suite à valeurs complexes** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'à tout entier naturel n, on associe un nombre complexe u_n.

Remarque.
Comme pour les suites réelles, on peut aussi considérer des suites complexes définies seulement à partir d'un certain rang n_0.

Notation.
Une suite à valeurs complexes se notera :
$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Les deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut noter $(x_n) = Re((u_n))$ et $(y_n) = Im((u_n))$.
L'ensemble des suites à valeurs complexes se note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2) Caractère borné

On rappelle que pour une suite réelle (u_n), on dit que (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe deux réels m_1, m_2 tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ m_1 \leq u_n \leq m_2$. On peut montrer facilement que cela revient à dire que la suite $(|u_n|)$ est majorée, c'est-à-dire qu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$ (ici, $|\,.\,|$ désigne la valeur absolue).
En remplaçant la valeur absolue par le module, on peut donc étendre cette notion aux suites à valeurs complexes :

Définition 2 (Suite complexe bornée).
On dit qu'une suite complexe (u_n) est bornée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$, où $|\ .\ |$ désigne le module sur $\mathbb{C}$.

Remarque (Interprétation géométrique).
En voyant $\mathbb{C}$ comme un plan d'origine $O = 0 + i0$, le fait que (u_n) soit bornée revient à dire qu'il existe un disque fermé de centre O et de rayon $M \geq 0$ qui contient tous les points d'affixe u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

ATTENTION.
Les notions de "suite majorée" et "suite minorée" ne peuvent pas s'étendre aux suites complexes, puisque **il n'y a pas d'inégalité dans C !** De même, les notions de "suite croissante", "suite décroissante" ne peuvent pas être définies. Mais on peut tout de même définir la convergence.

3) Convergence

On rappelle que pour une suite réelle (u_n) et un nombre réel ℓ, on dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

On a donc facilement :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff |u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $|\ .\ |$ désigne la valeur absolue.
En remplaçant la valeur absolue par le module, nous pouvons de même définir la notion de convergence pour une suite complexe :

Définition 3 (Convergence d'une suite complexe).
Soit (u_n) une suite complexe et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (où $|\ .\ |$ désigne le **module**).

Remarque.
Pour montrer la convergence d'une suite complexe, on peut donc se ramener à l'étude d'une suite **réelle positive** *: $r_n = |u_n - \ell|$, et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.*
Mais comment faire pour établir cette convergence si on ne connaît pas ℓ à l'avance ?
La proposition suivante répond à ce problème.

Proposition 4 (Caractérisation de la convergence des suites complexes).
La suite complexe (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ **si et seulement si** *les suites réelles $(x_n) = Re((u_n))$ et $(y_n) = Im((u_n))$ convergent respectivement vers $Re(\ell)$ et $Im(\ell)$.*

Preuve.
En notant $u_n = x_n + iy_n$ et $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, avec $x_n, y_n, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| = |(x_n - \ell_1) + i(y_n - \ell_2)| = \sqrt{(x_n - \ell_1)^2 + (y_n - \ell_2)^2}.$$

Montrons alors l'équivalence :

$$|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array} \right. .$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_2$, alors, par somme et composition de limites de suites réelles, on a

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque

$$|x_n - \ell_1| = \sqrt{(x_n - \ell_1)^2} \leq \sqrt{(x_n - \ell_1)^2 + (y_n - \ell_2)^2},$$

on en déduit $0 \leq |x_n - \ell_1| \leq |u_n - \ell|$ et de même $0 \leq |y_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell|$.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, donc par le théorème des gendarmes pour les suites réelles, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \ell_1| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n - \ell_2| = 0$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

Notation.
Si une suite complexe converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, on a donc facilement l'unicité de ℓ (d'après l'unicité de la limite d'une suite réelle). On notera donc dans ce cas

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} x_n + i \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

III Exercices

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (Suite récurrente avec exponentielle décroissante).
Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Etudier les variations de (u_n).
3. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice 2 (Equivalents).
Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, trouver une suite simple équivalente à (u_n) lorsque $n \to +\infty$.

1) $u_n = 2n^2 - n + 1$
2) $u_n = n^2 - \sin(2n+1)$
3) $u_n = 2^n + n$
4) $u_n = 2^n + 5^n$
5) $u_n = 3n^2 + n!$
6) $u_n = n + e^n + \ln(n)$
7) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
8) $u_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} + 3n - 1$.

Exercice 3 (Exemples de suites complexes).

1. On considère les trois suites de termes généraux :

$$u_n = (1+n) + (3+2n)i, \qquad v_n = -3e^{i\frac{(n+3)\pi}{3}}, \qquad w_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}.$$

   (a) Vérifier que (u_n) est une suite arithmétique puis calculer $A = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

   (b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

   (c) Vérifier que (v_n) est une suite géométrique puis calculer $B = \sum_{k=5}^{10} v_k$.

   (d) La suite (v_n) est-elle convergente ?
   Indication : travailler avec une suite extraite.

   (e) Etudier la convergence de la suite (w_n).

2. On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) définies par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}.$$

   (a) Etudier la convergence de la suite complexe (z_n) définie par $z_n = x_n + iy_n$.
   Indication : calculer z_{n+1} en fonction de z_n.

(b) En déduire la convergence des suites (x_n) et (y_n).

Exercice 4 (Suites arithmético-géométriques).
On considère la suite (réelle ou complexe) (u_n) définie par les relations :

$$u_0 \in \mathbb{K}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b,$$

où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
On se propose de calculer le terme général d'une telle suite.

1. Que se passe-t-il si $a = 1$? Donner sans justifier l'expression de u_n en fonction de n et u_0.
2. Que se passe-t-il si $b = 0$? Donner sans justifier l'expression de u_n en fonction de n et u_0.
3. On se place dans le cas général où $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Calculons u_n en fonction de n et de u_0.
   (a) **Première méthode** : Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de u_0, conjecturer une expression de u_n en fonction de n et u_0, puis la démontrer par récurrence.
   (b) **Seconde méthode** : Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{K}$ telle que la suite "décalée" $v_n = u_n - c$ soit géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n et u_0, puis celle de u_n.

Exercice 5.
Etudier la convergence de la suite complexe définie par la relation de récurrence :

$$z_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1.$$

Exercice 6 (Encore une suite récurrente).
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{3 + u_n}$.

1. Faire une étude graphique et conjecturer le comportement de la suite.
   On prouvera ces conjectures dans les questions qui suivent.
2. Montrer qu'en cas de convergence de (u_n), il n'y a que deux limites possibles. On notera x_2 la plus grande des deux valeurs.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_2 \leq u_n \leq 1$.
4. Etudier les variations de (u_n) et conclure.

Exercice 7 (*Suites trigonométriques).

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(nx)$ converge-t-elle ?
   Indication : on cherchera des relations entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2} d'une part, u_n et u_{2n} d'autre part. Ensuite, on fera un raisonnement par analyse-synthèse.
2. Faire de même avec la suite $v_n = \sin(nx)$ (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. En déduire les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite complexe $z_n = e^{inx}$ converge.

Exercice 8 (*Recollement de sous-suites).
Soit (u_n) une suite réelle telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.