Annexe 6 : Fonctions à valeurs vectorielles Corrigé des exercices

I Exercices d'application

Corrigé de l'exercice 1.
La fonction réelle $\varphi : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(car* $t^2+1>0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et on sait que* $\sqrt{\ }$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$*).*
La fonction vectorielle $f : u \mapsto (\ln(u), \arctan(u))$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *(car ses deux composantes sont dérivables).*
Puisque $\varphi(\mathbb{R}) \subset]0;+\infty[$*, la composée* $g = f \circ \varphi$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t)) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ \frac{1}{1+(\sqrt{t^2+1})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t^2+1} \\ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}(t^2+2)} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 2. • *Les fonctions* $t \to \dfrac{1-\cos t}{e^t-1}$ *et* $t \to \dfrac{\sin t}{e^t-1}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$*, donc* $\overrightarrow{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$*.*

- *Notons, pour* $t \neq 0$*,* $x(t) = \dfrac{1-\cos t}{e^t-1}$ *et* $y(t) = \dfrac{\sin t}{e^t-1}$*.*
  Au voisinage de 0, $x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2/2}{t} = \dfrac{t}{2}$*. Donc* $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$*.*
  De même, $y(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$*. Donc* $\lim_{t\to 0} y(t) = 1$*.*
  On a donc montré que $\lim_{t\to 0} \overrightarrow{f}(t) = (0,1) = \overrightarrow{f}(0)$*. La fonction* $\overrightarrow{f}$ *est donc continue en* 0*.*
- *De plus,* $x'(t) = \dfrac{\sin(t)(e^t-1) - (1-\cos(t))e^t}{(e^t-1)^2}$*. En utilisant un développement limité du numérateur, on obtient que* $x'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$*.*
  De même, $y'(t) = \dfrac{\cos(t)(e^t-1) - \sin(t)e^t}{(e^t-1)^2}$ *et* $y'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t^2/2}{t^2} = -\dfrac{1}{2}$*.*
  On a donc $\lim_{t\to 0} \overrightarrow{f}'(t) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$*.*
  Comme $\overrightarrow{f}$ *est continue en* 0 *et que* $\overrightarrow{f}'$ *admet une limite finie en* 0*, on peut affirmer que* $\overrightarrow{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *au voisinage de* 0 *(d'après le théorème de la limite de la dérivée appliquée à chacune des composantes de* $\overrightarrow{f}$*).*

En conclusion, $\overrightarrow{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Corrigé de l'exercice 3. *1. En notant* $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *pour tout* $t \in I$*, on a*

$$\forall t \in I, \qquad \varphi(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}.$$

Les fonctions x*,* y*,* z *sont de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* I *par hypothèse, et la fonction réelle* $t \mapsto \sqrt{t}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *(donc* $\mathcal{C}^2$*) sur l'intervalle* $]0;+\infty[$*. Puisque pour tout* $t \in I$*,* $(x(t), y(t), z(t)) \neq (0,0,0)$*, on en déduit que* $\forall t \in I,\ x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 \in]0;+\infty[$*.*
Donc par composition, la fonction réelle φ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur l'intervalle* I*.*

2. D'après la formule de φ *en fonction des composantes* x, y, z*, on a*

$$\forall t \in I, \qquad \varphi'(t) = \frac{\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)}{2\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}},$$

c'est-à-dire, puisque $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ *:*

$$\forall t \in I, \qquad \varphi'(t) = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

3. *D'après la question précédente, on a*

$$\forall t \in I, \qquad \varphi'(t) \times \varphi(t) = \langle f'(t), f(t) \rangle.$$

En dérivant cette égalité, on obtient :

$$\forall t \in I, \qquad \varphi''(t)\varphi(t) + \varphi'^2(t) = \frac{d}{dt}\langle f'(t), f(t)\rangle = \langle f''(t), f(t)\rangle + \langle f'(t), f'(t)\rangle,$$

c'est-à-dire

$$\varphi''(t)\|f(t)\| + \frac{\langle f'(t), f(t)\rangle^2}{\|f(t)\|^2} = \langle f''(t), f(t)\rangle + \|f'(t)\|^2,$$

ou encore

$$\varphi''(t) = \frac{\langle f''(t), f(t)\rangle + \|f'(t)\|^2}{\|f(t)\|} - \frac{\langle f'(t), f(t)\rangle^2}{\|f(t)\|^3}.$$

Corrigé de l'exercice 4. 1. $D_1 =]-1;1[$ *et*

$$f(t) = (0,1,0) + (1,-1,0)t + (\frac{1}{2}, 1, -1)t^2 + (\frac{1}{6}, -1, 0)t^3 + (\frac{1}{24}, 1, -\frac{1}{2})t^4 + (\frac{1}{120}, -1, 0)t^5 + o(t^5).$$

2. $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ *et*

$$g(t) = (1,1) + (2,0)t + (3, -\frac{1}{3})t^2 + (4,0)t^3 + (5, \frac{1}{5})t^4 + (6,0)t^5 + (7, -\frac{1}{7})t^6 + o(t^6).$$

3. $D_3 = \mathbb{R} \setminus (\{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$ *et*

$$u(t) = (\frac{1}{2}, 1)t + (\frac{1}{24}, -\frac{1}{3})t^3 + o(t^3).$$

4. $D_4 = \mathbb{R}$ *et*

$$v(t) = (1,1,1) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})t^2 + (\frac{1}{12}, \frac{5}{24}, -\frac{1}{8})t^4 + o(t^4).$$

Corrigé de l'exercice 5. 1. *On pose $h = t - 2$. Cette variable tend vers 0 lorsque $t \to 2$, et on a*

$$f(t) = f(2+h) = \left(\frac{(2+h)^2}{1+h}, \frac{(2+h)^3+4}{1+h}\right).$$

Or,

$$\frac{(2+h)^2}{1+h} = (4 + 4h + h^2) * (1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)) = 4 + h^2 - h^3 + o(h^3),$$

$$\frac{(2+h)^3+4}{1+h} = (12 + 12h + 6h^2 + h^3) * (1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)) = 12 + 6h^2 - 5h^3 + o(h^3),$$

donc

$$f(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}(t-2)^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}(t-2)^3 + o((t-2)^3).$$

2. *La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$, donc d'après la formule de Taylor-Young au voisinage de 2, on a également :*

$$f(t) = f(2) + f'(2)(t-2) + \frac{f''(2)}{2!}(t-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(t-2)^3 + o((t-2)^3).$$

Par unicité d'un DL, on en déduit en identifiant les coefficients d'ordre 3 :

$$\frac{f'''(2)}{3!} = (-1, -5),$$

donc

$$f'''(2) = (-6, -30).$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. *La fonction f donnée en exemple est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (car ses composantes le sont). On a par périodicité :*

$$f(0) = f(2\pi) = (1, 0),$$

mais pourtant, il n'existe pas de réel $c \in]0; 2\pi[$ tel que $f'(c) = (0, 0)$, puisque

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$$

(les fonctions cos *et* sin *ne s'annulent jamais en même temps).*
Ceci montre qu'il n'y a pas de théorème de Rolle pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ avec $m \geq 2$.
L'égalité des AF n'est pas vraie non plus car sinon, il existerait $c \in]0; 2\pi[$ tel que

$$f(2\pi) - f(0) = f'(c) * (2\pi - 0),$$

c'est-à-dire $f'(c) = 0$, et ceci est impossible.

2. *Idem en considérant l'exemple $f : t \mapsto e^{it}$ (qui est l'écriture complexe de la fonction vectorielle étudiée précédemment). Sa dérivée $f' : t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et on a $f(0) = f(2\pi)$.*

Moralité : le théorème de Rolle et l'égalité des AF sont des théorèmes spécifiques aux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ils ne s'appliquent pas aux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, ni aux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.