Annexe 5 : Révisions sur le dénombrement (TSI 1)
Corrigé des exercices

1) A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Vu que le mot MATHS possède 5 lettres distinctes, il y a autant d'anagrammes que de 5-listes de l'ensemble* $\Omega = \{M, A, T, H, S\}$ *à éléments 2 à 2 distincts, c'est-à-dire* $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$.

2. *On donne plusieurs solutions :*
   (a) *Il y a 5 choix pour placer le R. Pour chacun de ces choix, il y a* $\binom{4}{2} = 6$ *choix pour placer les deux B. Une fois le R et les deux B placés, les deux A sont automatiquement placés. Au total, il y a donc* $5 * 6 = 30$ *anagrammes de BABAR.*

   (b) *Il y a* $\binom{5}{2} = 10$ *choix pour placer les deux B. Pour chacun de ces choix,* $\binom{3}{2} = 3$ *choix pour placer les deux A, et le R est alors déterminé. Soit au total* $10 * 3 = 30$ *anagrammes.*

   (c) *On considère provisoirement que les deux B et les deux A de BABAR sont discernables (par exemple, on les écrit avec des couleurs différentes), on compte toutes les permutations de ces 5 lettres (comme pour trouver les anagrammes de MATHS). On obtient* $5! = 120$ *permutations. Mais en réalité, on a compté les mêmes mots plusieurs fois. Chaque mot a été compté* $2! \times 2! = 4$ *fois (puisqu'il y a* $2!$ *façons de permuter les deux B et* $2!$ *façons de permuter les deux A). Donc il y a* $\frac{5!}{2!2!} = 30$ *anagrammes au total.*

3. *En procédant comme pour BABAR, on obtient* $11 * 10 * \binom{9}{2} * \binom{7}{2} = 83160$ *anagrammes de ABRACADABRA.*

Corrigé de l'exercice 2. *1. Une équipe est une partie à* 3 *éléments de l'ensemble des personnes (de cardinal* 5*). Il y a donc au total* $\binom{5}{3} = 10$ *équipes possibles.*

2. *Vu qu'ici les rôles des membres de l'équipe ont une importance, on peut procéder de plusieurs manières :*
   (a) *on représente une équipe avec chef, sous-chef et adjoint comme une liste* (a_1, a_2, a_3)*, où* a_1 *est le chef (*5 *choix possibles),* a_2 *est le sous-chef (*4 *choix restants possibles une fois que* a_1 *a été choisi), et* a_3 *l'adjoint (*3 *choix restants possibles une fois* a_1 *et* a_2 *choisis). Il y a donc* $5 \times 4 \times 3 = 60$ *équipes avec chef, sous-chef et adjoint possibles.*

   (b) *on peut aussi multiplier le nombre d'équipes possibles (*10 *d'après la question 1.), par le nombre de façons de permuter les rôles dans chaque équipe (c'est-à-dire* $3!$*). Il y a donc* $10 * 3! = 60$ *équipes avec chef, sous-chef et adjoint possibles.*

3. *Là encore, on peut procéder de plusieurs manières :*
   (a) *on représente une équipe avec chef et 2 adjoints comme un couple* $(\{c\}, \{a_1, a_2\})$*, où le singleton* $\{c\}$ *représente le chef et la paire* $\{c_1, c_2\}$ *représente les deux adjoints (attention, c'est une* **paire**, **pas un couple** *!). Il y a* $\binom{5}{1} = 5$ *choix pour le chef, et une fois celui-ci choisi, il y a* $\binom{4}{2} = 6$ *choix pour la paire d'adjoints. Donc au total* $5 \times 6 = 30$ *équipes avec chef et 2 adjoints possibles.*

   (b) *ou alors on multiplie le nombre d'équipes possibles (10 d'après la question 1.), par le nombre de façons de choisir le chef dans une équipe de* 3*, c'est-à-dire* 3 *façons possibles. Les adjoints sont alors automatiquement déterminés. Il y a donc* $10 \times 3 = 30$ *équipes avec chef et 2 adjoints possibles.*

Corrigé de l'exercice 3.
Notons $T_1, \cdots, T_n$ *les livres.*

1. *On peut les classer de* $n!$ *façons (le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, \cdots, n\}$*).*
2. *Il y a* $n-1$ *positions possibles pour le couple* $(T_1; T_2)$ *(les positions* $(1, 2), (2, 3), \cdots, (n-1, n)$*). Une fois le couple* $(T_1; T_2)$ *placé, il y a* $(n-2)!$ *autres façons de placer les* $n-2$ *autres tomes. Au total, il y a donc* $(n-1) \times (n-2)! = (n-1)!$ *positions possibles qui valident cette contrainte.*

Corrigé de l'exercice 4. *1. Puisqu'une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble des cartes (de cardinal 32), il y a* $\binom{32}{5} = \frac{32*31*30*29*28}{5*4*3*2*1} = 32*31*29*7 = 201376$ *mains au total.*

2. Il suffit de chercher les "quintes flush" dans la couleur "pique" et de multiplier par 4.
Une quinte flush est déterminée par sa carte basse (qui a pour valeur $7, 8, 9$ *ou* 10*), il y a donc* 4 *quintes flush en pique, soit au total* $4*4 = 16$ *quintes flush.*

3. La carte basse d'une suite est $7, 8, 9$ *ou* 10*, il y a donc, en tenant compte des couleurs,* $4*4 = 16$ *choix pour la carte basse de la suite.*
Une fois la carte basse fixée, il y a 4 *choix pour la carte suivante (suivant sa couleur), puis* 4 *choix pour la troisième carte, puis* 4 *choix pour la* 4^e*, puis* 4 *choix pour la carte haute. Il y a donc au total :*

$$16*4^4 = 2^{12} = 4096.$$

suites au total.

4. Dans le jeu, il y a 4096 *suites de cartes, et parmi elles* 16 *quintes flush. Il y a donc au total* $4096 - 16 = 4080$ *quintes.*

5. Il suffit de compter les "flush" en pique, et de multiplier par 4*. Il y a* 8 *cartes à pique au total, donc* $\binom{8}{5} = \frac{8*7*6*5*4}{5*4*3*2*1} = 56$ *mains composées de* 5 *piques. Parmi elles,* 4 *quintes flush, donc* $56 - 4 = 52$ *flush à pique.*
Au total, il y a donc $52*4 = 208$ *flush dans le jeu.*

Corrigé de l'exercice 5. *1. (a) Une partie* $A \subset E$ *de cardinal* p *et qui contient* x_1 *et* x_2 *est une partie de la forme*

$$A = \{x_1, x_2, y_3, \cdots, y_p\} \text{ avec } \{y_3, \cdots, y_p\} \subset \{x_3, \cdots, x_n\},$$

elle est donc entièrement déterminée par le choix (sans ordre) de $p-2$ *éléments parmi* $n-2$.
Il y a donc $\binom{n-2}{p-2}$ *parties de la sorte.*

(b) Une partie $A \subset E$ *de cardinal* p *et qui contient* x_1 *mais pas* x_2 *est une partie de la forme*

$$A = \{x_1, y_2, y_3, \cdots, y_p\} \text{ avec } \{y_2, \cdots, y_p\} \subset \{x_3, \cdots, x_n\},$$

elle est donc entièrement déterminée par le choix (sans ordre) de $p-1$ *éléments parmi* $n-2$.
Il y a donc $\binom{n-2}{p-1}$ *parties de la sorte.*

(c) Une partie $A \subset E$ *de cardinal* p *et qui ne contient ni* x_1 *et* x_2 *est une partie de la forme*

$$A = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\} \subset \{x_3, \cdots, x_n\},$$

elle est donc entièrement déterminée par le choix (sans ordre) de p *éléments parmi* $n-2$.
Il y a donc $\binom{n-2}{p}$ *parties de la sorte.*

(d) L'ensemble des parties $A \subset E$ *de cardinal* p *qui contiennent* x_1 *ou* x_2 *est le complémentaire dans* $\mathcal{P}_p(E)$ *des parties qui ne contiennent ni* x_1 *ni* x_2*. D'après 1.(c), il y a donc* $\binom{n}{p} - \binom{n-2}{p}$ *parties de la sorte.*

2. On sait qu'il y a $\binom{n}{p}$ *parties de cardinal* p *dans* E*. Elles sont de quatre types :*

(a) celles qui contiennent x_1 *et* x_2*, il y en a* $\binom{n-2}{p-2}$ *;*

(b) celles qui contiennent x_1 *mais pas* x_2*, il y en a* $\binom{n-2}{p-1}$ *;*

(c) celles qui contiennent x_2 *mais pas* x_1*, il y en a aussi* $\binom{n-2}{p-1}$ *(vu que* x_1, x_2 *ont des rôles symétriques) ;*

(d) celles qui contiennent ni x_1 *ni* x_2*, il y en a* $\binom{n-2}{p}$ *;*

L'ensemble $\mathcal{P}_p(E)$ *est donc la réunion disjointe de ces quatre parties, donc en additionnant les cardinaux, on obtient la formule voulue :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

3. *Avec un calcul direct :*

$$\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}=\frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}+\frac{2(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!}+\frac{(n-2)!}{p!(n-p-2)!}.$$

En réduisant au dénominateur commun $p!(n-p)!$, on obtient

$$\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}=\frac{(n-2)!}{p!(n-p)!}(p(p-1)+2p(n-p)+(n-p)(n-p-1)),$$

c'est-à-dire

$$\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}=\frac{(n-2)!}{p!(n-p)!}n(n-1)=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}.$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. *On obtient*

$$|E|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

2. *Notons E l'ensemble des élèves de la classe.*
Notons A l'ensemble des élèves étudiant au moins l'anglais.
Notons B l'ensemble des élèves étudiant au moins l'allemand.
Notons C l'ensemble des élèves étudiant au moins l'espagnol.
On cherche $n=|E|$.

(a) *Puisque tous les élèves étudient au moins une langue, on a $E=A\cup B\cup C$ donc*

$$|E|=n=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=21+|A\cap B\cap C|,$$

si bien que $|A\cap B\cap C|=n-21$.

(b) *D'une part, $|A\cap B\cap C|\leq\min(|A\cap B|;|A\cap C|;|B\cap C|)$, donc $|A\cap B\cap C|\leq 7$.*
D'autre part, $B\cap C=(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$ et la réunion est disjointe, donc

$$7=|A\cap B\cap C|+|\overline{A}\cap B\cap C|\leq|A\cap B\cap C|+|\overline{A}\cap C|=|A\cap B\cap C|+|A|-|A\cap C|=|A\cap B\cap C|+1,$$

donc $|A\cap B\cap C|\geq 6$. Finalement, $|A\cap B\cap C|=6$ ou 7.

(c) *On déduit de la question précédente que $n=27$ ou 28. Mais l'effectif de la classe est pair, donc $n=28$.*

Corrigé de l'exercice 7. 1. *On cherche le cardinal de $\mathcal{P}_2(E)=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2,\ X\subset Y\}$.*
Si on fixe une partie $Y\subset E$, alors le nombre de parties X telles que $X\subset Y$ est $\#\mathcal{P}(Y)=2^{\#Y}$.
Puisque les cardinaux possibles des parties Y de E sont les $p\in\{0,1,\cdots,n\}$ et que pour chaque p, il y a $\binom{n}{p}$ parties de cardinal p, on en déduit que

$$\#\mathcal{P}_2(E)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p=3^n.$$

2. *On cherche le cardinal de $\mathcal{P}_3(E)=\{(X,Y,Z)\in\mathcal{P}(E)^3,\ X\subset Y\subset Z\}$.*
On a $\mathcal{P}_3(E)=\bigcup_{Z\in\mathcal{P}(E)}\{(X,Y,Z)\in\mathcal{P}(E)^3,\ (X,Y)\in\mathcal{P}_2(Z)\}$ (et cette réunion est disjointe), donc

$$\#\mathcal{P}_3(E)=\sum_{Z\in\mathcal{P}(E)}\#\mathcal{P}_2(Z)=\sum_{Z\in\mathcal{P}(E)}3^{\#Z}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}3^p=4^n.$$

2) Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 8. 1. *Il y en a $k+1$ (exactement : $(0,k),(1,k-1),\cdots,(k-1,1),(k,0)$).*

2. *On a* $\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ a+b+c=n\} = \bigcup_{q=0}^{n} \{(a,b,q) \in \mathbb{N}^3,\ a+b=n-q\}$, *et cette réunion est disjointe, donc :*

$$\#\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ a+b+c=n\} = \sum_{q=0}^{n} \#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2,\ a+b=n-q\}.$$

Or, d'après la question précédente :

$$\#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2,\ a+b=n-q\} = n-q+1,$$

donc

$$\#\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ a+b+c=n\} = \sum_{q=0}^{n}(n-q+1) = (n+1)+n+\cdots+2+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 9. 1. *On cherche le cardinal de l'ensemble* $\mathcal{P}_X = \{Y \in \mathcal{P}(E),\ X \cap Y = \emptyset\}$. *Vu que* $X \cap Y = \emptyset \iff Y \subset (E \setminus X)$, *donc* $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}(E \setminus X)$. *On en déduit*

$$\#\mathcal{P}_X = 2^{\#(E\setminus X)} = 2^{n-p}.$$

2. *On cherche le cardinal de l'ensemble* $\mathcal{P}_{disj} = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X \cap Y = \emptyset\}$. *Pour chaque partie* $X \subset E$ *de cardinal* p, *il y a* 2^{n-p} *parties* Y *telles que* $X \cap Y = \emptyset$. *Vu qu'il y a* $\binom{n}{p}$ *parties de* E *de cardinal* p *et que les valeurs possibles de* p *sont* $\{0,1,\cdots,n\}$, *on en déduit que*

$$\#\mathcal{P}_{disj} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p} = 3^n.$$