Annexe 5 : Révisions sur le dénombrement (TSI 1)

I Rappel de cours

Définition 1 (Ensemble fini).
Un ensemble Ω est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\{1, 2, \cdots, n\} \to \Omega$.

Proposition 2 (Unicité du cardinal).
Soit Ω un ensemble fini et non vide. Alors il existe un **unique** *$n \in \mathbb{N}^*$ tel que Ω soit en bijection avec l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$. On appelle n* **le cardinal de Ω** *(c'est son nombre d'éléments).*

Notation.
Le cardinal de Ω sera noté $Card(\Omega)$ ou $\#\,\Omega$, ou plus rarement $|\Omega|$.

Convention.
Par convention, on pose $\#\,\emptyset = 0$. Ainsi, l'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul.

Proposition 3 (Propriétés du cardinal).
Soit Ω un ensemble fini.

(i) Si $A \subset \Omega$, alors A est fini et $\#\,A \leq \#\,\Omega$.

(ii) Si $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, alors $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

(iii) Si $A_1 \subset \Omega, \cdots, A_n \subset \Omega$, et si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ (parties deux à deux disjointes), alors
$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \#A_k.$$

Notation.
Etant donné un ensemble Ω (fini ou pas) :

- on note **$\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω**, c'est-à-dire l'ensemble des $A \subset \Omega$.
  Ainsi : $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ signifie que $A \subset \Omega$.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note **$\mathcal{P}_k(\Omega)$ l'ensemble des parties de cardinal k de l'ensemble Ω**.
  On a bien entendu $\mathcal{P}_k(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
  Ainsi : $A \in \mathcal{P}_k(\Omega)$ signifie que $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ avec $a_1, \cdots, a_k$ des éléments de Ω deux à deux distincts.
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note **Ω^k l'ensemble des k-listes de Ω**, c'est-à-dire l'ensemble des listes ordonnées $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ avec $a_1, \cdots, a_k$ des éléments de Ω (pas nécessairement distincts).
  Convention : Ω^0 n'est formé que de la "liste vide".

Vocabulaire.
Une k-liste de Ω est appelée aussi "famille à k éléments de Ω".

ATTENTION.
Dans une partie, l'ordre des éléments ne compte pas. Dans une liste, si.
Par exemple, $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$ mais $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$.
Dans une partie, il n'y a pas de répétition d'éléments (par exemple, $\{x, x, x\} = \{x\}$), alors que dans une liste, il peut y avoir répétition (par exemple, la liste $(1, 2, 1)$).

Rappelons les résultats suivants (vus en TSI 1). Ils seront très utiles en probabilités.

Proposition 4 (Dénombrement des listes et des parties).
Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) le nombre de **k-listes $(a_1, \cdots, a_k)$** *de Ω est n^k.*

(ii) le nombre de **k-listes $(a_1, \cdots, a_k)$ à éléments 2 à 2 distincts** *est :*

$$\begin{cases} 0 \text{ si } k > n \\ n*(n-1)*\cdots*(n-k+1) \text{ si } 1 \leq k \leq n \\ 1 \text{ si } k = 0 \end{cases}.$$

(iii) le nombre de **parties à k éléments** *de Ω est :*

$$\begin{cases} 0 \text{ si } k > n \\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \end{cases}.$$

(iv) le nombre total de parties de Ω est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, c'est-à-dire 2^n.

Remarque.

- *Moyen simple de retenir ces résultats :*
  - *Pour construire une k-liste $(a_1, \cdots, a_k)$, on a n choix pour le premier élément a_1, puis n choix pour a_2, $\ldots$, et enfin n choix pour a_k, donc au total $n*n*\cdots*n = n^k$ choix.*
  - *Pour construire une k-liste $(a_1, \cdots, a_k)$ à éléments 2 à 2 distincts (avec $k \leq n$), on a n choix pour le premier élément a_1, puis $n-1$ choix pour a_2, $\ldots$, et enfin $n-k+1$ choix pour a_k, donc au total $n*(n-1)*\cdots*(n-k+1)$ choix.*
  - *Le nombre de parties à k éléments se déduit du nombre de k listes à éléments 2 à 2 distincts : en effet, avec chaque partie $\{a_1, \cdots, a_k\}$ à k éléments, on peut former (par permutation des éléments) $k!$ listes à éléments 2 à 2 distincts. Il y a donc $k!$ moins de parties que de listes, ce qui permet de déduire que le nombre de parties à k éléments est*

$$\#\mathcal{P}_k(\Omega) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

- *Un cas particulier intéressant est celui des* **permutations** *de Ω, c'est-à-dire les n-listes à éléments 2 à 2 distincts : d'après le point (ii) (avec $k = n$), il y en a $n*(n-1)*\cdots*1 = n!$*
- *Formellement, on a $\#\,\Omega^k = (\#\,\Omega)^k$, $\#\,\mathcal{P}_k(\Omega) = \binom{\#\,\Omega}{k}$ et $\#\,\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\#\,\Omega}$.*

II Exercices

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

1) A faire en priorité

Exercice 1.
Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Déterminer $\mathcal{P}_k(\Omega)$ pour $0 \leq k \leq 4$, puis déterminer $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. Déterminer Ω^k pour $0 \leq k \leq 2$.

Exercice 2 (Anagrammes).
Etant donné un mot, on appelle anagramme tout autre mot obtenu par permutation des lettres de ce mot.

1. Quel est le nombre d'anagrammes de MATHS ?
2. Quel est le nombre d'anagrammes de BABAR ?
3. Quel est le nombre d'anagrammes de ABRACADABRA ?

Exercice 3 (Composition d'équipes).
On dispose d'un groupe de cinq personnes.

1. Combien d'équipes de trois personnes peut-on former ?
2. Combien d'équipes avec un chef, un sous-chef et un adjoint ?
3. Combien d'équipes avec un chef et deux adjoints peut-on former ?

Exercice 4 (Livres à classer).
Soit un entier $n \geq 2$. Les n tomes d'une encyclopédie sont placés sur une même étagère.

1. Combien y a-t-il de manières différentes de les classer ?
2. Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre sur l'étagère ?

Exercice 5 (Poker).
On joue au poker avec 32 cartes, divisées en 4 couleurs (pique, coeur, carreau et trèfle) comportant chacune 8 cartes. Indépendamment de leur couleur, les cartes sont ordonnées suivant leur valeur, de la façon suivante :

$$7 < 8 < 9 < 10 < V < D < R < A.$$

On appelle "main" un ensemble de 5 cartes (sans tenir compte de l'ordre). On dit qu'une main forme une suite si elle est composée de 5 cartes consécutives (pour l'ordre défini précédemment).

1. Déterminer le nombre total de mains.
2. Déterminer le nombre de "quintes flush" (5 cartes de la même couleur qui forment une suite).
3. Déterminer le nombre total de suites.
4. Déterminer le nombre de "quintes" (5 cartes qui forment une suite, sans être toutes de la même couleur).
5. Déterminer le nombre de "flush" (5 cartes de la même couleur, qui ne forment pas une suite).

Exercice 6 (Contenir ou ne pas contenir).
On note $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 2$), et on considère un entier p compris entre 2 et $n - 2$.

1. Combien y a-t-il de parties de E à p éléments qui contiennent :
   (a) x_1 et x_2 ;
   (b) x_1 mais pas x_2 ;
   (c) ni x_1 ni x_2 ;

   (d) x_1 ou x_2.
2. En déduire la relation :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

3. Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

Exercice 7 (*LV2 ? LV3 ?).

1. Soit E un ensemble fini, et A, B, C trois parties de E. Calculer $\#(A \cup B \cup C)$.
   On pourra procéder par associativité.
2. Une application : dans une classe de n élèves, il y a autant de filles que de garçons. Tous les élèves étudient au moins une langue. Parmi eux :
   — 20 étudient l'anglais ;
   — 15 étudient l'allemand ;
   — 10 étudient l'espagnol ;
   — 8 étudient l'anglais et l'allemand ;
   — 9 étudient l'anglais et l'espagnol ;
   — 7 étudient l'allemand et l'espagnol.
   (a) Exprimer le nombre d'élèves qui étudient les trois langues en fonction de n.
   (b) Etablir un encadrement du nombre d'élèves qui étudient les trois langues.
   (c) En déduire l'effectif de la classe.

Exercice 8 (*Comptage de sous-ensembles).
Soit E un ensemble à n éléments.

1. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \subset Y$?
2. Combien y a-t-il de triplets (X, Y, Z) de parties de E telles que $X \subset Y \subset Z$?

2) Exercices supplémentaires

Exercice 9 (Comptage de solutions).

1. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = k$?
2. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b + c = n$?

Exercice 10 (*Comptage de sous-ensembles bis).
Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = \emptyset$?