Annexe 4 : Fonctions à valeurs complexes

I Définition et notations

Définition 1 (Fonction à valeurs complexes).
Une **fonction à valeurs complexes** est une application $f : D \to \mathbb{C}$, où $D \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'à tout nombre réel $t \in D$, on associe un nombre complexe $f(t)$.

Exemple.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ est une fonction à valeurs complexes.

ATTENTION.
On n'envisage pas ici des fonctions de la variable complexe, c'est-à-dire des applications $D \to \mathbb{C}$ avec $D \subset \mathbb{C}$. Ce type de fonction n'est pas au programme des classes préparatoires.

Notation.
Une fonction à valeurs complexes se notera :

$$f : D \to \mathbb{C}, \qquad \forall t \in D,\ f(t) = f_1(t) + i f_2(t).$$

Les deux fonctions réelles $f_1 : D \to \mathbb{R}$ et $f_2 : D \to \mathbb{R}$ sont appelées respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de f. On peut noter $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$.
L'ensemble des fonctions à valeurs complexes $D \to \mathbb{C}$ se note $\mathbb{C}^D$ ou $\mathcal{F}(D, \mathbb{C})$.

II Caractère borné

Tout comme les suites réelles, on dit qu'une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée. On montre facilement que f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée, c'est-à-dire s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D,\ |f(x)| \leq M$ (ici, $|\ .\ |$ désigne la valeur absolue).
En remplaçant la valeur absolue par le module, on peut donc là aussi étendre la notion de fonction bornée aux fonctions à valeurs complexes :

Définition 2 (Fonction à valeurs complexes bornée).
On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ (avec $D \subset \mathbb{R}$) est bornée s'il existe un réel M tel que
$\forall x \in D,\ |f(x)| \leq M$ (ici, $|\ .\ |$ désigne le module).

Remarque.
f est bornée si et seulement si il existe un disque fermé de centre O et de rayon M qui contient tous les points d'affixe $f(t)$ avec $t \in D$.

ATTENTION.
Là encore, les notions de "fonction majorée", "fonction minorée", "fonction croissante", "fonction décroissante" ne peuvent pas s'étendre aux fonctions à valeurs complexes.

III Limites

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On souhaite définir la limite en a d'une fonction à valeurs complexes.

On procède comme pour les suites : pour une fonction réelle et un nombre réel ℓ, on a l'équivalence $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell \iff |f(t) - \ell| \underset{t \to a}{\longrightarrow} 0$ (où $|\ .\ |$ est la valeur absolue), donc la définition suivante vient naturellement :

Définition 3 (Limite d'une fonction à valeurs complexes).
Soit $D \subset \mathbb{R}$, soit $f : D \to \mathbb{C}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $f(t)$ tend vers ℓ lorsque t tend vers a et on note $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell$ si $|f(t) - \ell| \underset{t \to a}{\longrightarrow} 0$ (ici $| \, . \, |$ est le module).

On dispose du même résultat que pour les suites sur la convergence des parties réelle/imaginaire :

Proposition 4 (Caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs complexes).
Soit $D \subset \mathbb{R}$, soit $f : D \to \mathbb{C}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. Alors on a l'équivalence :

$$f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \left\{ \begin{array}{l} Re(f(t)) \underset{t \to a}{\longrightarrow} Re(\ell) \\ Im(f(t)) \underset{t \to a}{\longrightarrow} Im(\ell) \end{array} \right. .$$

Preuve.
Exactement la même preuve que pour les suites : notons $f_1 = Re(f)$, $f_2 = Im(f)$, $\ell_1 = Re(\ell)$ et $\ell_2 = Im(\ell)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\lim\limits_{t \to a} f_1(t) = \ell_1$ et $\lim\limits_{t \to a} f_2(t) = \ell_2$, alors, par somme et composition de limites de fonctions réelles, on a

$$\lim_{t \to a} |f(t) - \ell| = \lim_{t \to a} \sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2 + (f_2(t) - \ell_2)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0,$$

donc $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque

$$|f_1(t) - \ell_1| = \sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2} \leq \sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2 + (f_2(t) - \ell_2)^2},$$

on en déduit $0 \leq |f_1(t) - \ell_1| \leq |f(t) - \ell|$ et de même $0 \leq |f_2(t) - \ell_2| \leq |f(t) - \ell|$.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{t \to a} |f(t) - \ell| = 0$, donc par le théorème des gendarmes pour les fonctions réelles, on déduit $\lim\limits_{t \to a} |f_1(t) - \ell_1| = 0$ et $\lim\limits_{t \to a} |f_2(t) - \ell_2| = 0$, c'est-à-dire $f_1(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell_2$.

Notation.
Si une fonction à valeurs complexes admet une limite en a, on a donc facilement l'unicité de sa limite ℓ (d'après l'unicité de la limite d'une fonction réelle). On notera donc dans ce cas

$$\ell = \lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} f_1(t) + i \lim_{t \to a} f_2(t).$$

Remarque.
On peut définir de même la notion de limite à gauche/à droite en a si $a \in \mathbb{R}$. Par contre, on ne peut pas définir la notion de limite infinie dans ce cadre (dans l'ensemble des nombres complexes, "l'infini" n'a pas vraiment de sens).

IV Continuité et dérivabilité

Rappel : étant donnés une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ et un point $a \in D$:

- on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{t \to a} f(t) = f(a)$;
- on dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe et est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite.

Rappelons également que si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

On se propose ici d'étendre cette notion aux fonctions à valeurs complexes.

Définition 5 (Continuité d'une fonction à valeurs complexes).
Soit $D \subset \mathbb{R}$, soit $f : D \to \mathbb{C}$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si les fonctions réelles $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en a.

Remarque.
En notant $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$, on a $f = f_1 + if_2$, et donc :

$$f \text{ est continue en } a \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to a} f_1(t) = f_1(a) \\ \lim\limits_{t\to a} f_2(t) = f_2(a) \end{cases} \iff \lim_{t\to a} f(t) = f(a).$$

On retrouve donc la même notion de continuité que pour les fonctions réelles.

Définition 6 (Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si les fonctions réelles $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a. Dans ce cas, on appelle nombre dérivé de f en a le nombre complexe :

$$f'(a) = Re(f)'(a) + iIm(f)'(a).$$

On dit que f est dérivable sur I si elle dérivable en tout point $a \in I$.
Si f est dérivable sur I, la fonction $f' = Re(f)' + iIm(f)'$ est appelée fonction dérivée de f, et f' est également une fonction à valeurs complexes.

Remarque.
En notant $f = f_1 + if_2$, on a $\forall t \in I \setminus \{a\}$: $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} = \dfrac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a} + i\dfrac{f_2(t)-f_2(a)}{t-a}$, donc

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to a} \frac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a} \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to a} \frac{f_2(t)-f_2(a)}{t-a} \text{ existe dans } \mathbb{R} \end{cases} \iff \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

De plus, on a dans ce cas :

$$f'(a) = f_1'(a) + if_2'(a) = \lim_{t\to a} \frac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a} + i \lim_{t\to a} \frac{f_2(t)-f_2(a)}{t-a} = \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

On retrouve donc là aussi la même notion que pour les fonctions réelles.

Remarque.
On peut définir de même les notions de continuité (ou de dérivabilité) à gauche/à droite en a.

Exemple.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = ie^{it}$.
En effet, pour tout réel t, on a $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$. Les fonctions cos et sin étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f l'est aussi, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \cos'(t) + i\sin'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = ie^{it}.$$

Proposition 7 (Dérivée d'une somme/d'un produit de fonctions complexes).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), soient deux fonctions dérivables $f, g : I \to \mathbb{C}$. Alors la fonction somme $f + g : I \to \mathbb{C}$ et la fonction produit $fg : I \to \mathbb{C}$ sont dérivables et

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

Preuve.
Notons $f = f_1 + if_2$ et $g = g_1 + ig_2$, avec f_1, f_2, g_1, g_2 qui sont des fonctions dérivables $I \to \mathbb{R}$.
On a $f + g = (f_1 + g_1) + i(f_2 + g_2)$ et $fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1)$.
Les parties réelle et imaginaire de $f+g$ et fg sont des fonctions dérivables (comme sommes et produits de fonctions dérivables $I \to \mathbb{R}$), donc les fonctions $f + g$ et fg sont dérivables sur I, et en utilisant les propriétés de la dérivation des fonctions réelles :

$$(f+g)' = (f_1 + g_1)' + i(f_2 + g_2)' = f_1' + g_1' + i(f_2' + g_2'),$$

c'est-à-dire

$$(f+g)' = (f_1' + if_2') + (g_1' + ig_2') = f' + g'.$$

De même,

$$(fg)' = (f_1g_1 - f_2g_2)' + i(f_1g_2 + f_2g_1)' = (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f_2g_1'),$$

c'est-à-dire

$$(fg)' = f_1' \underbrace{(g_1 + ig_2)}_{=g} + f_1 \underbrace{(g_1' + ig_2')}_{=g'} + f_2' \underbrace{(-g_2 + ig_1)}_{ig} + f_2 \underbrace{(-g_2' + ig_1')}_{ig'},$$

donc

$$(fg)' = (f_1' + if_2')g + (f_1 + if_2)g' = f'g + fg'.$$

Proposition 8 (Composition avec l'exponentielle complexe).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{\phi(t)}$ est dérivable et

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}.$$

Remarque.
Rappelons que pour un nombre complexe $z = a + ib$, l'exponentielle de z est définie comme suit :

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Preuve.
En notant $\phi_1 = Re(\phi)$ et $\phi_2 = Im(\phi)$, on a pour tout $t \in I$:

$$f(t) = e^{\phi_1(t) + i\phi_2(t)} = e^{\phi_1(t)}e^{i\phi_2(t)} = e^{\phi_1(t)}\cos(\phi_2(t)) + ie^{\phi_1(t)}\sin(\phi_2(t)).$$

Vu que les fonctions ϕ_1, ϕ_2 sont dérivables, ainsi que cos, sin, exp, on obtient par composition et produit que $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables, donc f est dérivable. De plus, pour tout $t \in I$:

$$f_1'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\phi_1(t)}\cos(\phi_2(t))\right) = e^{\phi_1(t)} \times (\phi_1'(t)\cos(\phi_2(t)) - \phi_2'(t)\sin(\phi_2(t))),$$

$$f_2'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\phi_1(t)}\sin(\phi_2(t))\right) = e^{\phi_1(t)} \times (\phi_1'(t)\sin(\phi_2(t)) + \phi_2'(t)\cos(\phi_2(t))),$$

donc

$$\begin{aligned} f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) &= e^{\phi_1(t)} \times \phi_1'(t) \times (\cos(\phi_2(t)) + i\sin(\phi_2(t))) \\ &\quad + e^{\phi_1(t)} \times \phi_2'(t) \times (-\sin(\phi_2(t)) + i\cos(\phi_2(t))) \\ &= e^{\phi_1(t)} \times \phi_1'(t) \times e^{i\phi_2(t)} + e^{\phi_1(t)} \times \phi_2'(t) \times ie^{i\phi_2(t)} \\ &= e^{\phi_1(t)}e^{i\phi_2(t)} \times (\phi_1'(t) + i\phi_2'(t)) = e^{\phi_1(t) + i\phi_2(t)} \times \phi'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}. \end{aligned}$$

ATTENTION.
On ne peut pas établir de formule de dérivation composée générale $(g \circ f)' = \cdots$ dans ce cadre des fonctions à valeurs complexes, car si $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : J \to \mathbb{C}$, où I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, alors f et g ne se composent pas.

V Exercices d'application

Exercice 1.
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (2it+3)e^{it-1} \end{array} \right. , \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (t+it^2)e^{i\cos(t)} \end{array} \right. .$$

Exercice 2.
En utilisant l'exponentielle complexe, déterminer une primitive de la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t)e^{3t} \end{array} \right. .$$