Annexe 2 : Révisions d'algèbre linéaire de TSI 1

A chaque fois, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Définition 1 (Espace vectoriel).
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** (abrégé en "$\mathbb{K}$-ev") est un ensemble E muni de deux lois :

- une loi appelée "addition", notée $+ : E \times E \to E$: à un couple $(x, y) \in E^2$, on associe un élément $x + y \in E$;
- une loi appelée "multiplication externe", notée $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$: à un couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on associe un élément $\lambda \cdot x \in E$ (on notera aussi λx, sans le "point") ;

qui vérifient les propriétés suivantes :

- l'addition est commutative ($x + y = y + x$), associative ($(x + y) + z = x + (y + z)$), possède un élément neutre noté 0_E ($x + 0_E = 0_E + x = x$ pour tout $x \in E$) et chaque élément $x \in E$ possède un "symétrique", noté $-x$ (il vérifie $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$).
- la multiplication externe possède les propriétés suivantes :
  $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
  $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
  $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$;
  $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$.

Vocabulaire.
Les éléments de E sont appelés "vecteurs" et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés "scalaires" ou "nombres".

Exemple.
Liste de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels classiques (à connaître par coeur) :

- l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des listes à n éléments de $\mathbb{K}$ (notées en ligne ou en colonne), où $n \in \mathbb{N}^*$;
- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (en général, on identifie les "matrices-colonne" de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aux éléments de $\mathbb{K}^n$) ;
- l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ (suites réelles ou complexes) ;
- l'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions $A \to \mathbb{R}$, où A est une partie de $\mathbb{R}$. On le note aussi $\mathbb{R}^A$.
- plus généralement : l'ensemble $\mathcal{F}(X; F)$ des fonctions $X \to F$, où X est un ensemble quelconque et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On le note aussi F^X.

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2 (Sous-espace vectoriel).
Un **sous-espace vectoriel** de E (abrégé en "sev de E") est une partie $F \subset E$ telle que :

(*i*) $0_E \in F$;

(*ii*) $\forall(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;

(*iii*) $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Proposition 3.
Si F est un sev de E, alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (et les lois sur F sont les restrictions à F des lois sur E).

Proposition 4.
F est un sev de E ssi $0_E \in F$ et $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times F \times F,\ \lambda \cdot x + y \in F$.

Proposition 5.
Toute intersection (même infinie) de sev de E est un sev de E.

Définition 6 (Somme de deux sev).
Si F et G sont deux sev de E, alors on note $F+G$ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ de la forme $x = x_1+x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

Proposition 7.
La somme $F + G$ est un sev de E, et c'est le plus petit sev de E contenant F et G.

Définition 8 (Somme directe).
On dit que deux sev F et G sont **en somme directe** si tout vecteur $x \in F + G$ possède une décomposition en somme unique, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1, x_3 \in F \\ x_2, x_4 \in G \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{array} \right. .$$

Dans ce cas, on note $F + G = F \oplus G$.

Proposition 9.
F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 10 (Sev supplémentaires).
On dit que deux sev F et G sont **supplémentaires dans E** s'ils sont en somme directe et si $F+G = E$ (on abrège en $F \oplus G = E$).

Attention, ne pas confondre "somme directe" et "supplémentaires" !

II Familles finies de vecteurs

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1, \cdots, x_n)$ une **famille de n vecteurs de E**, où $n \in \mathbb{N}$ (c'est le "cardinal" de la famille, c'est-à-dire son nombre de vecteurs pas nécessairement distincts).

Convention.
Si $n = 0$, alors la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est vide (aucun vecteur).

Définition 11 (Combinaison linéaire d'une famille).
Une **combinaison linéaire de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$** est un vecteur $x \in E$ de la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

où les λ_k sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Convention.
Si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ (somme vide), donc la seule combinaison linéaire de la famille vide est le vecteur nul 0_E.

Notation.
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ se note $\boldsymbol{Vect(x_1, \cdots, x_n)}$.

Proposition 12.
L'ensemble $Vect(x_1, \cdots, x_n)$ *est le plus petit sev de* E *qui contient les vecteurs* $x_1, \cdots, x_n$. *On dit que* $Vect(x_1, \cdots, x_n)$ *est le* **sev engendré** *par la famille* $(x_1, \cdots, x_n)$.

Définition 13 (Famille génératrice).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **génératrice de *E*** (ou "engendre E") si $Vect(x_1, \cdots, x_n) = E$, ce qui signifie que les éléments de E sont exactement les combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$.

Proposition 14.
Si $(x_1, \cdots, x_n)$ *est génératrice de* E *et que l'on rajoute un vecteur* $x \in E$*, alors la "sur-famille"* $(x_1, \cdots, x_n, x)$ *est aussi génératrice de* E.

Définition 15 (Famille liée).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **liée** s'il existe une combinaison linéaire nulle et non triviale (à coefficients non tous nuls) de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$, c'est-à-dire :

$$\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0), \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E.$$

Proposition 16.
Si $(x_1, \cdots, x_n)$ *est liée et que l'on rajoute un vecteur* $x \in E$*, alors la "sur-famille"* $(x_1, \cdots, x_n, x)$ *est aussi liée.*

Proposition 17.
$(x_1, \cdots, x_n)$ *est liée ssi un des* x_k *est combinaison linéaire des autres (mais lequel ?)*

Définition 18 (Famille libre).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire que la seule combinaison linéaire nulle de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est la combinaison triviale (à coefficients tous nuls) :

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right).$$

Proposition 19.
Toute "sous-famille" d'une famille libre est elle-même libre (en enlevant des vecteurs à une famille libre, elle reste libre).

Définition 20 (Base).
On dit que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est une **base de *E*** si elle est libre et génératrice de E.

Proposition 21.
Il y a équivalence entre :

(i) $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une base de* E *;*

(ii) $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une famille libre maximale de* E *(au sens où elle est libre, et si on rajoute un vecteur, elle ne l'est plus) ;*

(iii) $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une famille génératrice minimale de* E *(au sens où elle est génératrice de* E*, et si on retire un vecteur, elle ne l'est plus).*

Proposition 22.
Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *est une base de* E*, alors pour tout vecteur* $x \in E$*, il existe une unique liste* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ *telle que* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. *On dit que* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *sont les* **coordonnées** *de* x *dans la base* $\mathcal{B}$.

III Espaces vectoriels de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 23 (Espace vectoriel de dimension finie).
On dit que E est **de dimension finie** si E possède (au moins) une famille génératrice finie $(x_1, \cdots, x_n)$.

Théorème 24 (Existence de bases).
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède des bases, et elles ont toutes le même cardinal (c'est-à-dire le même nombre de vecteurs). Ce nombre est appelé **la dimension de E** *(noté $\dim(E)$), c'est un entier $n \in \mathbb{N}$.*

On a en fait les résultats suivants, plus précis :

Proposition 25.
Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie,

(i) toute famille libre de E peut être complétée en une base de E (ce résultat est parfois appelé "théorème de la base incomplète") ;

(ii) de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E (ce résultat est parfois appelé "théorème de la base excédentaire").

Remarque.
Le seul $\mathbb{K}$-ev de dimension 0 est l'espace nul $\{0_E\}$ (la famille vide en est une base).

Vocabulaire.
Les $\mathbb{K}$-ev de dimension 1 sont appelés des **droites**, et ceux de dimension 2 sont appelés des **plans**.

Proposition 26.
Si E est de dimension finie (notée $n = \dim(E)$), et si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, il y a équivalence entre :

(i) $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre ;

(ii) $(x_1, \cdots, x_n)$ est génératrice de E ;

(iii) $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E.

Remarque.
Ce résultat est très utile pour montrer qu'une famille est une base de E **lorsqu'on connaît déjà la dimension de E**. *Il suffit alors de montrer que la famille en question est libre (par exemple) et possède le "bon" nombre de vecteurs.*

Proposition 27.
Si E est de dimension finie, et si F est un sev de E, alors :

(i) F est lui-même de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;

(ii) $\dim(F) = \dim(E) \implies F = E$.

Remarque.
Ce résultat est très utile pour montrer que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont égaux : il suffit de montrer qu'un est un sev de l'autre et qu'ils ont la même dimension.

Définition 28 (Rang d'une famille de vecteurs).
Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est une famille de p vecteurs de E, alors on appelle **rang de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$** la dimension de l'espace engendré par cette famille : $rg(x_1, \cdots, x_p) = \dim(Vect(x_1, \cdots, x_p))$.

Remarque.
Le rang de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants de la famille.

Proposition 29.
On a $rg(x_1, \cdots, x_p) \leq p$, mais si E est de dimension finie, on a aussi $rg(x_1, \cdots, x_p) \leq \dim(E)$.

Proposition 30.
Si E est de dimension finie et si F, G sont deux sev de E en somme directe, alors

(i) *en réunissant une base de F et une base de G (dans n'importe quel ordre), on obtient une base de $F \oplus G$;*

(ii) $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition 31 (Formule de Grassmann).
Si E est de dimension finie, et si F, G sont des sev de E, alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

IV Applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev (pas nécessairement de dimension finie).

Définition 32 (Application linéaire).
On dit qu'une application $f : E \to F$ est **linéaire** si

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;

(ii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque.
Pas besoin de vérifier en plus que $f(0_E) = 0_F$, c'est automatiquement entraîné par ces deux propriétés.

Proposition 33.
f est linéaire ssi $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Définition 34 (Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme).
On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire $E \to E$.
On appelle **isomorphisme** entre E et F toute application linéaire bijective $E \to F$.
On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective $E \to E$ ("auto=endo+iso").

Proposition 35.
La somme de deux applications linéaires est linéaire, la multiplication d'une application linéaire par un scalaire aussi, et la composée de deux applications linéaires aussi.

Proposition 36.
Si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire (et bijective !).

Preuve.
Soient deux vecteurs y_1, y_2 dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$. On va montrer que

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).$$

Vu que f est bijective, les vecteurs y_1 et y_2 possèdent chacun un unique antécédent par f : il existe un unique $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et un unique $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Donc

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = f^{-1}(\lambda f(x_1) + f(x_2)).$$

Mais f est linéaire, donc $\lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda x_1 + x_2)$. D'où :

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = f^{-1}(f(\lambda x_1 + x_2)) = (f^{-1} \circ f)(\lambda x_1 + x_2) = \lambda x_1 + x_2.$$

Enfin, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ (puisque x_1 est l'unique antécédent de y_1) et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, donc

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2),$$

ce qui montre bien la linéarité de l'application $f^{-1} : F \to E$.

Définition 37 (Noyau d'une application linéaire).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. **Le noyau de f**, noté $Ker(f)$, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$.

Proposition 38.
$Ker(f)$ est un sev de E et f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$.

Preuve.
- Montrons que $Ker(f)$ est un sev de E.
  On a $0_E \in Ker(f)$ car $f(0_E) = 0_F$ (puisque f est linéaire).
  Soit $x_1, x_2 \in Ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $f(x_1) = f(x_2) = 0_F$, donc par linéarité de f :
  $$f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F,$$
  ce qui montre que $\lambda x_1 + x_2 \in Ker(f)$.
- Montrons que (f injective $\Rightarrow Ker(f) = \{0_E\}$).
  Supposons f injective et montrons que $Ker(f) = \{0_E\}$.
  Si $x \in Ker(f)$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc $x = 0_E$ par injectivité de f.
  Ceci montre que $Ker(f) \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque est immédiate puisque $0_E \in Ker(f)$.
  Donc $Ker(f) = \{0_E\}$.
- Montrons que ($Ker(f) = \{0_E\} \Rightarrow f$ injective).
  Supposons $Ker(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
  Si $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1, x_2 \in E$, alors par linéarité de f, on obtient $f(x_1 - x_2) = 0_F$, c'est-à-dire $x_1 - x_2 \in Ker(f)$. Mais comme $Ker(f) = \{0_E\}$, on en déduit que $x_1 - x_2 = 0_E$, donc $x_1 = x_2$.
  Ceci montre l'injectivité de f.

Définition 39 (Image d'une application linéaire).
L'image de f, notée $Im(f)$ est l'ensemble des $y \in F$ qui s'écrivent $y = f(x)$ avec $x \in E$ (c'est-à-dire les $y \in F$ ayant au moins un antécédent par f).

Proposition 40.
$Im(f)$ est un sev de F et f est surjective ssi $Im(f) = F$.

Preuve.
- Montrons que $Im(f)$ est un sev de F.
  On a $0_F \in Im(f)$ car $0_F = f(0_E)$ (donc 0_F a un antécédent : 0_E).
  Soit $y_1, y_2 \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de l'image, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Donc, par linéarité de f :
  $$\lambda y_1 + y_2 = \lambda f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda x_1 + x_2).$$
  Cette écriture montre que $\lambda y_1 + y_2 \in Im(f)$, puisque ce vecteur a un antécédent dans E : $\lambda x_1 + x_2$.
- Montrons que f est surjective ssi $Im(f) = F$.
  C'est direct d'après la définition de la surjectivité : $Im(f)$ est l'ensemble des vecteurs de F qui admettent un antécédent par f, et "f surjective" signifie que tous les vecteurs de F admettent un antécédent par f. Donc clairement, "f surjective" signifie que $Im(f) = F$.

Définition 41 (Rang d'une application linéaire).
Si $Im(f)$ est de dimension finie, on appelle **rang de f** la dimension de son image : $rg(f) = \dim(Im(f))$.

Proposition 42.
Si E et F sont de dimension finie, si $f : E \to F$ est linéaire et si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective ssi f est surjective.

Remarque.
Ce résultat est très utile pour montrer qu'une application linéaire **en dimension finie** *est bijective : il suffit de vérifier que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, et que l'application est injective (par exemple).*

Proposition 43 (Théorème du rang).
Si $f : E \to F$ est linéaire et si E est de dimension finie, alors :

(i) $Im(f)$ *est automatiquement de dimension finie ;*

(ii) $\dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(Ker(f)) + rg(f)$.

V Représentations matricielles

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Notation.
Etant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on note $\boldsymbol{[x]_{\mathcal{B}}}$ ou $\boldsymbol{Mat_{\mathcal{B}}(x)}$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \iff [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition 44 (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base).
Etant donnée une base $\mathcal{B}$ de E et une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs de E, on appelle **matrice de la famille $\boldsymbol{(x_1, \cdots, x_p)}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$** la matrice dont les colonnes sont les coordonnées respectives de $x_1, \cdots, x_p$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_p)$ cette matrice.

On fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, avec $\dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$.
On fixe également une application linéaire $f : E \to F$, une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$ de F.

Proposition 45.
Etant donné un vecteur $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in E$, on a $f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k)$ par linéarité de f, donc **$\boldsymbol{f(x)}$ est connu dès que l'on connaît $\boldsymbol{f(e_1), \cdots, f(e_p)}$** *(l'image de la base $\mathcal{B}_E$ par f).*
Plus précisément, on a

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p)).$$

C'est cette idée qui fonde la **représentation matricielle d'une application linéaire** :

Définition 46 (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases).
On appelle **matrice de $\boldsymbol{f}$ dans les bases $\boldsymbol{\mathcal{B}_E}$ (au départ) et $\boldsymbol{\mathcal{B}_F}$ (à l'arrivée)** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les p colonnes sont les coordonnées respectives de $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$. On la note $Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

Remarque.
En notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$, on a donc

$$Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = Mat_{(u_1, \cdots, u_n)}(f(e_1), \cdots, f(e_p)),$$

ou de façon abrégée :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E)).$$

Proposition 47 (Formule de l'image d'un vecteur).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$[f(x)]_{\mathcal{B}_F} = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times [x]_{\mathcal{B}_E}.$$

Proposition 48 (Matrice de la composée de deux applications linéaires).
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, et si $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F, G, alors

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Proposition 49 (Lien entre bijectivité et inversibilité).
Une application linéaire $f : E \to F$ est bijective ssi sa matrice A dans n'importe quelles bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est inversible (ce qui signifie que A est carrée et qu'il existe B de même format que A telle que $AB = BA = I_n$). Et dans ce cas, A^{-1} est la matrice de $f^{-1} : F \to E$ (dans les bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E$).

Définition 50 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice).
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par $f(X) = AX$ (le produit de la matrice A par le vecteur colonne X) est appelée application linéaire canoniquement associée à A. En fait, A est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ (au départ) et $\mathbb{K}^n$ (à l'arrivée).

Définition 51 (Noyau, image, rang d'une matrice).
Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **noyau de A** le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A :
$Ker(A)$ est donc l'ensemble des vecteurs colonne $X \in \mathbb{K}^p$ tels que $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$.
De même, **l'image** $Im(A)$ est l'ensemble des vecteurs colonne $Y \in \mathbb{K}^n$ qui s'écrivent $Y = AX$ avec $X \in \mathbb{K}^p$.
Enfin, on appelle **rang de** A la dimension de $Im(A)$.

Proposition 52.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors les p colonnes de A, notées $C_1, \cdots, C_p$, forment une famille génératrice de l'image de A :

$$Im(A) = Vect(C_1, \cdots, C_p) \subset \mathbb{K}^n.$$

Remarque.
Ainsi, en "observant" les colonnes de A, on peut obtenir des informations sur l'image de A, donc en particulier sur le rang de A (qui est donc le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de A).

Théorème 53 (Invariance du rang par changement de base).

- *Le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ est égal au rang de la matrice de cette famille dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$.*
- *Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.*

Théorème 54 (Lien entre rang et pivots).
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est égal au rang du système linéaire homogène $AX = 0$, c'est-à-dire au nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite en lignes associée à ce système.

VI Exercices

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

1) Exercices à traiter en priorité

Exercice 1 (Base et équations d'un sev).

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^5$, on considère $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On note $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$.

1. La famille $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ est-elle libre ? Quel est son rang ?
2. Déterminer une base de F, notée $\mathcal{B}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace F. A-t-on besoin de la base $\mathcal{B}$ pour cela ?
4. A partir du système d'équations cartésiennes obtenu :
   (a) obtenir un système d'équations paramétriques de F,
   (b) puis retrouver une base de F.

Exercice 2 (Calcul du rang d'une famille de vecteurs).
Soit a un réel et soient $\overrightarrow{x} = (1, 1, a)$, $\overrightarrow{y} = (1, a, 1)$ et $\overrightarrow{z} = (a, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ *(on sera amené à distinguer plusieurs valeurs de a).*

Exercice 3 (Familles libres, liées).
On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_1 : x \to 1 \\ f_2 : x \to \cos(x) \\ f_3 : x \to \cos(2x) \\ f_4 : x \to \cos^2(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1 : x \to 1 \\ g_2 : x \to x^3 + 1 \\ g_3 : x \to |x^3| \end{cases}.$$

1. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ou liée ?
2. La famille (g_1, g_2, g_3) est-elle libre ou liée ?

Exercice 4 (Exemples et contre-exemples de sev).
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, pour les lois usuelles, des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 0\}, \qquad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\}, \qquad E_3 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n = o(1/n)\}$$

$$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]\}, \qquad E_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(2) = 0\}, \qquad E_6 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 1\}.$$

On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles (ou des fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cela revient au même), et que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Exemple rectangulaire).
Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, -2x + y + 3z).$$

1. On note respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Sans démontrer la linéarité de f, donner la matrice A de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par :

   $$b'_1 = (1, -2, 3), \qquad b'_2 = (-1, 0, 1), \qquad b'_3 = (1, 1, -1)$$

   et $\mathcal{C}' = (c'_1, c'_2)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définie par :

   $$c'_1 = (2, 1), \qquad c'_2 = (3, 1).$$

   On admet que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}'$ une base de $\mathbb{R}^2$.
   Déterminer la matrice A' de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$.

Exercice 6 (Puissance de matrice avec polynôme annulateur).
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire $a_0I_2 + a_1A + a_2A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_2 et A.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$).
Soit f l'application de $E = \mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, 2x - y + 3z) .$$

1. Etude de f
   (a) Montrer en détail que f est un endomorphisme de E.
   (b) Donner la matrice de f dans la base canonique de E.
   (c) Déterminer une base de $Ker(f)$.
   (d) Déterminer une base de $Im(f)$.
2. Etude d'une projection
   (a) Montrer que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$ est un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E.
   (b) Soit $p : E \to E$ la projection sur H parallèlement à $Ker(f)$. Pour tout vecteur $X = (x, y, z) \in E$, déterminer l'expression de $p(X)$ en fonction de X.
   (c) Donner la matrice de p dans la base canonique de E.

Exercice 8 (Exemple avec des polynômes).
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' - XP' - 3P.$$

1. Montrer en détail que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $F = \mathbb{R}_3[X]$ est stable par f.
   Cela signifie que $f(F) \subset F$, ou encore que pour tout $P \in F$, on a $f(P) \in F$.
3. On note g la restriction de f à F ; c'est donc un endomorphisme de F. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de F.
4. Déterminer une base de $Ker(g)$.
5. Montrer que $Im(g) = \mathbb{R}_2[X]$.

2) Exercices supplémentaires

Exercice 9 (Un classique).
Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où n est un entier naturel non nul.
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 10 (Calculs de bases et de dimension).
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels puis en déterminer une base et la dimension :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$.
2. $B = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = 0\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé).
3. $C = Vect(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = 2 - x$.

Exercice 11 (*Réunion de deux sous-espaces vectoriels).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F, G deux sev de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 12 (Calcul d'inverse en dimension n).
Vérifier que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}).$$

Exercice 13 (*L'opérateur de différence dans les polynômes).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Vérifier que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $Ker(\varphi_n)$.
3. Calculer $Im(\varphi_n)$.

   On considère maintenant l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

4. Calculer le(s) antécédent(s) par φ du polynôme X.
   On cherchera d'abord le degré de ces antécédents.
5. Calculer $Ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$.

Exercice 14 (Calcul de rang de matrices).
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 15 (Puissance de matrice avec la formule du binôme).
En utilisant la formule du binôme, calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (Puissance de matrice par récurrence).

On souhaite calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Peut-on utiliser la formule du binôme ? Pourquoi ?
2. Calculer les premières puissances, conjecturer une formule pour A^n puis la démontrer par récurrence.