Annexe 1 : Suites à valeurs complexes
Corrigé des exercices

1) A traiter en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = (1 + 2i)$ (constante), donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 1 + 2i$.*
En outre,

$$A = \sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} ((1 + 3i) + k(1 + 2i)) = (1 + 3i)\underbrace{\sum_{k=0}^{10} 1}_{=11} + (1 + 2i)\underbrace{\sum_{k=0}^{10} k}_{=55} = 66 + 143i.$$

(b) Non, la suite (u_n) diverge, car sa partie réelle $Re(u_n) = 1 + n$ est divergente (sa partie imaginaire aussi d'ailleurs...).

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = -3e^{i\frac{(n+3)\pi}{3}} = 3e^{i\frac{n\pi}{3}} = 3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $B = \sum_{k=5}^{10} v_k = \sum_{k=5}^{10} v_0 q^k = v_0 q^5 \times \dfrac{1 - q^6}{1 - q}$.
Or, $q^6 = e^{i2\pi} = 1$, donc $B = 0$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{3n} = 3e^{in\pi} = 3(-1)^n$, et cette suite réelle diverge (elle admet elle même deux suites extraites de limites différentes). Donc (v_n) est divergente, puisqu'elle admet une suite extraite divergente.

(e) On réécrit w_n sous forme algébrique : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 9} - i\left(\dfrac{n}{n + 1} + \dfrac{3n}{n^2 + 9}\right)$.
D'après la proposition 4, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2 + 9}\right) - i \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n + 1} + \frac{3n}{n^2 + 9}\right) = 1 - i.$$

2. (a) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1 + i}{2} z_n$, donc (par récurrence)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \left(\frac{1 + i}{2}\right)^n z_0.$$

D'après les propriétés du module, on a alors

$$|z_n| = \left|\frac{1 + i}{2}\right|^n |z_0| = \frac{|z_0|}{\sqrt{2}^n},$$

donc $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$, ce qui montre que la suite (z_n) converge vers 0.

(b) En utilisant encore une fois la proposition 4, on en déduit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corrigé de l'exercice 2. *1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+2} = (2\cos x)u_{n+1} - u_n, \qquad u_{2n} = 2u_n^2 - 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, en passant à la limite dans ces relations, on obtient

$$\begin{cases} \ell(1 - \cos(x)) = 0 \\ (\ell - 1)(2\ell + 1) = 0 \end{cases}.$$

Le cas $\ell = 0$ est contradictoire avec la seconde relation, donc $\ell \neq 0$, ce qui implique

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \ell \in \{1, -\frac{1}{2}\} \end{cases}$$

On a donc $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que la suite (u_n) est constante égale à 1.
Réciproquement, la suite constante égale à 1 est évidemment convergente.
On a donc montré l'équivalence

$$(u_n) \text{ converge} \iff x \equiv 0\ [2\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.$$

2. *Ici, il faut utiliser les résultats établis précédemment pour u_n, ainsi que l'interaction entre les suites (u_n) et (v_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$v_{2n} = 2v_n u_n, \qquad v_{n+2} = (2\cos x)v_{n+1} - v_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si (v_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, en passant à la limite dans la seconde relation, on obtient

$$\ell(1 - \cos(x)) = 0.$$

- *Si $\ell = 0$, alors on utilise la relation*

$$v_{n+1} = (\cos x)v_n + (\sin x)u_n,$$

qui entraîne $(\sin x)u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci impose $\sin(x) = 0$, car sinon, on aurait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et c'est impossible d'après la question précédente (puisque (u_n) ne peut converger que vers 1).

- *Si $\ell \neq 0$, alors on a $\cos(x) = 1$, et donc $\sin(x) = 0$.*

On a dans tous les cas $\sin(x) = 0$ et donc $x \in \pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que la suite (v_n) est constante égale à 0.
Réciproquement, la suite constante égale à 0 est évidemment convergente.
On a donc montré l'équivalence

$$(v_n) \text{ converge} \iff x \equiv 0\ [\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 0.$$

3. *Puisque $z_n = u_n + iv_n$, la suite (z_n) converge si et seulement si les suites (u_n) et (v_n) convergent, ce qui équivaut à $x \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire $z_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après les questions précédentes.*

Corrigé de l'exercice 3. 1. *Si $a = 1$, on a $u_{n+1} = u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison b. On a alors $u_n = u_0 + nb$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Si $b = 0$, on a $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison a. On a alors $u_n = u_0 * a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. (a) **Première méthode**
Par définition de la suite (u_n), on a

$$u_1 = au_0 + b, \qquad u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + ab + b,$$

$$u_3 = au_2 + b = a(a^2u_0 + ab + b) + b = a^3u_0 + a^2b + ab + b.$$

On conjecture alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n u_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)b = a^n u_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a}b$$

(ce qui a du sens car $a \neq 1$).
Vérification par récurrence :

- *la formule est vraie pour $n = 0$ car $a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a}b = 1 * u_0 + 0 * b = u_0$ dans ce cas.*
- *pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, si on a $u_n = a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a}b$, alors*

$$u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a}b\right) + b = a^{n+1}u_0 + \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}b,$$

donc la formule est bien héréditaire.

On a donc bien montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n u_0 + \dfrac{1-a^n}{1-a} b.$

(b) **Seconde méthode**
Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - c = a u_n + b - c = a\left(u_n + \frac{b-c}{a}\right),$$

donc (v_n) *est géométrique (de raison* a*) si et seulement si* $u_n + \frac{b-c}{a} = v_n$*, ce qui équivaut à* $\frac{b-c}{a} = -c$*, ou encore à* $c = \frac{b}{1-a}$.
La suite $(v_n) = \left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$ *étant géométrique de raison* a*, nous avons*

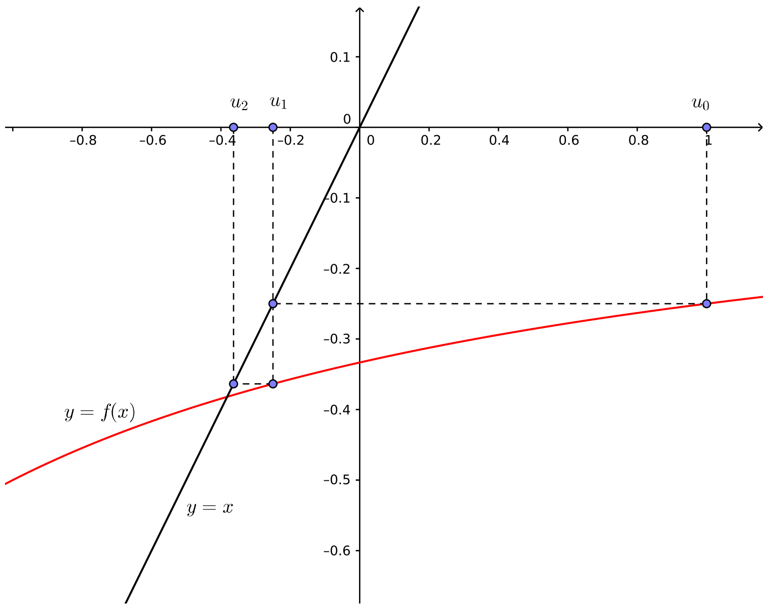
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = a^n * v_0 = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right),$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + c = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = a^n u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b.$$

2) Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 4. *1. Représentation graphique : on a représenté la fonction* $f : x \mapsto \frac{-1}{3+x}$*, la droite* $y = x$*, et les premiers termes* u_0*,* u_1*,* u_2*.*



Conjecture : la suite (u_n) *semble décroissante et convergente, vers un point* ℓ *tel que* $f(\ell) = \ell$.

2. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$*. Puisqu'on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \times (3 + u_n) = -1,$$

on en déduit (par passage à la limite) que $\ell \times (3 + \ell) = -1$*, donc*

$$\ell \neq -3, \qquad \ell^2 + 3\ell + 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\ell = x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \quad ou \quad \ell = x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Il n'y a donc que deux limites possibles.

3. *D'une part, on a $f(x_2) = x_2$. D'autre part, f est croissante sur l'intervalle $[x_2, +\infty[$, puisque*

$$\forall x \geq x_2 > -3, \qquad f'(x) = \frac{1}{(3+x)^2} \geq 0.$$

On a donc

$$x_2 \leq x \leq 1 \implies f(x_2) \leq f(x) \leq f(1) \implies x_2 \leq f(x) \leq -0.25 < 1.$$

Ceci montre que l'intervalle $[x_2; 1]$ est stable par f.
On en déduit par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_2 \leq u_n \leq 1$:

- *C'est vrai pour $n = 0$, puisque $u_0 = 1$.*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé : si $u_n \in [x_2; 1]$, alors $f(u_n) \in [x_2; 1]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [x_2; 1]$.*

4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{1}{3+u_n} - u_n = -\frac{u_n^2+3u_n+1}{3+u_n}$.*
Ceci se factorise en

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - x_1)(u_n - x_2)}{u_n + 3} \leq 0,$$

puisque $u_n \geq x_2 > x_1 > -3$. La suite (u_n) est donc décroissante. Puisqu'elle est également minorée (par x_2), elle converge vers une limite $\ell \geq x_2$. D'après la question 2, cette limite est nécessairement x_2. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_2$.

Corrigé de l'exercice 5.
Notons $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} u_{3n}$ et $\ell_3 = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.
Notons également $x_n = u_{2n}$, $y_n = u_{3n}$, et $z_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *La suite (u_{6n}) est une sous-suite de (x_n), car $x_{3n} = u_{2(3n)} = u_{6n}$, mais aussi de la suite (y_n), car $y_{2n} = u_{3(2n)} = u_{6n}$. Vu qu'une sous-suite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite, on en déduit (puisque (x_n) et (y_n) convergent) que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} y_n = \ell_2.$$

  Mais par unicité de la limite, cela impose $\ell_1 = \ell_2$.
- *De même, il suffit de montrer que les suites (y_n) et (z_n) ont une sous-suite commune pour avoir $\ell_2 = \ell_3$. C'est le cas, car pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} = y_{2n+1}, \qquad u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} = z_{3n+1}.$$

On en déduit que $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, et donc en particulier que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}.$$

Cela entraîne que (u_n) converge vers ℓ_1.

Corrigé de l'exercice 6.
Première méthode (basique mais calculatoire) :
On calcule directement le terme général par récurrence :

$$z_n = \frac{i}{2} z_{n-1} + 1 = \frac{i}{2}\left(\frac{i}{2} z_{n-2} + 1\right) + 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 z_{n-2} + \frac{i}{2} + 1,$$

puis

$$z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2} z_{n-3} + 1\right) + \frac{i}{2} + 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^3 z_{n-3} + \left(\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{i}{2} + 1.$$

On conjecture alors la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n z_0 + \left(1 + \frac{i}{2} + \cdots + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\right) = \left(\frac{i}{2}\right)^n z_0 + \frac{1 - \left(\frac{i}{2}\right)^n}{1 - \frac{i}{2}},$$

qui se vérifie facilement par récurrence. Enfin, on fait tendre $n \to +\infty$, et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{5}(2+i).$$

Seconde méthode (plus astucieuse) :
Tout d'abord, identifions les limites possibles de la suite : **si** *(z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors, en passant à la limite dans la relation $z_{n+1} = \dfrac{i}{2}z_n + 1$, on obtient $\ell = \dfrac{i}{2}\ell + 1$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{2}{5}(2+i)$.*
Voyons maintenant si la suite (z_n) converge : on doit étudier $u_n = z_n - \ell = z_n - \dfrac{2}{5}(2+i)$. On a

$$u_{n+1} = z_{n+1} - \ell = \left(\frac{i}{2}z_n + 1\right) - \left(\frac{i}{2}\ell + 1\right) = \frac{i}{2}(z_n - \ell) = \frac{i}{2}u_n.$$

La suite $u_n = z_n - \dfrac{2}{5}(2+i)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{i}{2}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{2}{5}(2+i)$.