Annexe 1 : Suites à valeurs complexes

I Définition et notations

Définition 1 (Suite à valeurs complexes).
Une **suite à valeurs complexes** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'à tout entier naturel n, on associe un nombre complexe u_n.

Remarque.
Comme pour les suites réelles, on peut aussi considérer des suites complexes définies seulement à partir d'un certain rang n_0.

Notation.
Une suite à valeurs complexes se notera :

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Les deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut noter $(x_n) = Re((u_n))$ et $(y_n) = Im((u_n))$.
L'ensemble des suites à valeurs complexes se note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

II Caractère borné

On rappelle que pour une suite réelle (u_n), on dit que (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe deux réels m_1, m_2 tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ m_1 \leq u_n \leq m_2$. On peut montrer facilement que cela revient à dire que la suite $(|u_n|)$ est majorée, c'est-à-dire qu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$ (ici, $|\ .\ |$ désigne la valeur absolue).
En remplaçant la valeur absolue par le module, on peut donc étendre cette notion aux suites à valeurs complexes :

Définition 2 (Suite complexe bornée).
On dit qu'une suite complexe (u_n) est bornée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$, où $|\ .\ |$ désigne le module sur $\mathbb{C}$.

Remarque (Interprétation géométrique).
En voyant $\mathbb{C}$ comme un plan d'origine $O = 0 + i0$, le fait que (u_n) soit bornée revient à dire qu'il existe un disque fermé de centre O et de rayon $M \geq 0$ qui contient tous les points d'affixe u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

ATTENTION.
Les notions de "suite majorée" et "suite minorée" ne peuvent pas s'étendre aux suites complexes, puisque **il n'y a pas d'inégalité dans C !** De même, les notions de "suite croissante", "suite décroissante" ne peuvent pas être définies. Mais on peut tout de même définir la convergence.

III Convergence

On rappelle que pour une suite réelle (u_n) et un nombre réel ℓ, on dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

On a donc facilement :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff |u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $|\ .\ |$ désigne la valeur absolue.

En remplaçant la valeur absolue par le module, nous pouvons de même définir la notion de convergence pour une suite complexe :

Définition 3 (Convergence d'une suite complexe).
Soit (u_n) une suite complexe et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (où $|\ .\ |$ désigne le **module**).

Remarque.
Pour montrer la convergence d'une suite complexe, on peut donc se ramener à l'étude d'une suite **réelle positive** *:* $r_n = |u_n - \ell|$*, et montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.
Mais comment faire pour établir cette convergence si on ne connaît pas ℓ *à l'avance ?*
La proposition suivante répond à ce problème.

Proposition 4 (Caractérisation de la convergence des suites complexes).
La suite complexe (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ **si et seulement si** *les suites réelles* $(x_n) = Re((u_n))$ *et* $(y_n) = Im((u_n))$ *convergent respectivement vers* $Re(\ell)$ *et* $Im(\ell)$.

Preuve.
En notant $u_n = x_n + iy_n$ et $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, avec $x_n, y_n, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| = |(x_n - \ell_1) + i(y_n - \ell_2)| = \sqrt{(x_n - \ell_1)^2 + (y_n - \ell_2)^2}.$$

Montrons alors l'équivalence :

$$|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \end{cases}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_2$, alors, par somme et composition de limites de suites réelles, on a

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque

$$|x_n - \ell_1| = \sqrt{(x_n - \ell_1)^2} \leq \sqrt{(x_n - \ell_1)^2 + (y_n - \ell_2)^2},$$

on en déduit $0 \leq |x_n - \ell_1| \leq |u_n - \ell|$ et de même $0 \leq |y_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell|$.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, donc par le théorème des gendarmes pour les suites réelles, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \ell_1| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n - \ell_2| = 0$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

Notation.
Si une suite complexe converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, on a donc facilement l'unicité de ℓ (d'après l'unicité de la limite d'une suite réelle). On notera donc dans ce cas

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} x_n + i \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

IV Exercices

1) A traiter en priorité

Exercice 1 (Exemples de suites complexes).

1. On considère les trois suites de termes généraux :

$$u_n = (1+n) + (3+2n)i, \qquad v_n = -3e^{i\frac{(n+3)\pi}{3}}, \qquad w_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}.$$

   (a) Vérifier que (u_n) est une suite arithmétique puis calculer $A = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

   (b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

   (c) Vérifier que (v_n) est une suite géométrique puis calculer $B = \sum_{k=5}^{10} v_k$.

   (d) La suite (v_n) est-elle convergente ?
   Indication : travailler avec une suite extraite.

   (e) Etudier la convergence de la suite (w_n).

2. On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) définies par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases} .$$

   (a) Etudier la convergence de la suite complexe (z_n) définie par $z_n = x_n + iy_n$.
   Indication : calculer z_{n+1} en fonction de z_n.

   (b) En déduire la convergence des suites (x_n) et (y_n).

Exercice 2 (Suites trigonométriques).

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(nx)$ converge-t-elle ?
   Indication : on cherchera des relations entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2} d'une part, u_n et u_{2n} d'autre part. Ensuite, on fera un raisonnement par analyse-synthèse.
2. Faire de même avec la suite $v_n = \sin(nx)$ (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. En déduire les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite complexe $z_n = e^{inx}$ converge.

Exercice 3 (Suites arithmético-géométriques).
On considère la suite (réelle ou complexe) (u_n) définie par les relations :

$$u_0 \in \mathbb{K}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b,$$

où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
On se propose de calculer le terme général d'une telle suite.

1. Que se passe-t-il si $a = 1$? Donner sans justifier l'expression de u_n en fonction de n et u_0.
2. Que se passe-t-il si $b = 0$? Donner sans justifier l'expression de u_n en fonction de n et u_0.
3. On se place dans le cas général où $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Calculons u_n en fonction de n et de u_0.

   (a) **Première méthode** : Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de u_0, conjecturer une expression de u_n en fonction de n et u_0, puis la démontrer par récurrence.

   (b) **Seconde méthode** : Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{K}$ telle que la suite "décalée" $v_n = u_n - c$ soit géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n et u_0, puis celle de u_n.

2) Exercices supplémentaires

Exercice 4 (Encore une suite récurrente).

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{3+u_n}$.

1. Faire une étude graphique et conjecturer le comportement de la suite.
   On prouvera ces conjectures dans les questions qui suivent.
2. Montrer qu'en cas de convergence de (u_n), il n'y a que deux limites possibles. On notera x_2 la plus grande des deux valeurs.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_2 \leq u_n \leq 1$.
4. Etudier les variations de (u_n) et conclure.

Exercice 5 (*Recollement de sous-suites).

Soit (u_n) une suite réelle telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 6 (*).

Etudier la convergence de la suite complexe définie par la relation de récurrence :

$$z_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1.$$